

## Matematik Paradoksları

- \* **Dogru Parçasi Paradoksu**
- \* **2+2=5 Paradoksu**
- \* **Cantor Paradoksu**
- \* **Karışım Paradoksu**
- \* **Bütün Sayılar Eşittir Paradoksu**
- \* **Karışık Bir Hesap Paradoksu**
- \* **Hempel Paradoksu**
- \* **Arnauld Paradoksu**
- \* **Berber Paradoksu**
- \* **Russel Paradoksu**

**Dogru Parçasi Paradoksu:** Önce dogru parçasinin tarifini yapalım: Dogru Parçasi: Baslangici ve sonu olan ve sonsuz adet noktadan olusan dogru. Pekiye nokta nedir? Nokta: Kalemin kagida biraktigi en küçük iz veya belirti.Malûmdur ki noktanin boyutu yoktur. O halde dikkat. Paradoks basliyor: Noktanin boyutu olmadigina göre iki noktanin yanyana gelmesi birsey ifade etmez.

100 nokta veya 1 milyar nokta da yanyana geldiginde herhangi bir sekil olusturmaz.( Çünkü sekil olusturmasi için gerekli olan boyut özelligini saglamiyor) Bu suna benzer ki; sifir ile sifirin toplami yine sifirdir. Milyarlarca sifiri toplasak 'yarim' dahi etmez. O halde dogrunun taniminda bir hata var. Çünkü sonsuz adet noktanin yanyana gelmesi birsey ifade etmez! Noktanin çok çok az da olsa boyutu oldugunu kabul etmemiz gerekir. Bu sefer de noktanin tarifi hatali olur. Noktayı boyutlu kabul edelim. Karsimiza bir paradoks daha çıkar; dogru parçasinda sonsuz adet nokta olduguna göre dogru parçasinin da uzunlugu sonsuz olmalidir. Çünkü çok az da olsa boyutu olan bir seyden sonsuz adedi yanyana gelirse sonsuz uzunluk olur.

### 2+2=5 Paradoksu:

$X = Y$  .....olsun

$X^2 = X.Y$ .....esitligin her iki tarafini 'X' ile çarptik.

$X^2 - Y^2 = XY - Y^2$ .....her iki taraftan 'Y<sup>2</sup>' çikardik.

$(X + Y).(X - Y) = Y.(X - Y)$ .....sol tarafi çarpanlara ayirdik, sag tarafi 'Y' parantezine aldik.

$(X + Y) = Y$ .....( X - Y )'ler sadelesti.

$X + X = X$ .....X = Y oldugundan,

$2.X = X$ .....'X' leri topladik.

$2 = 1$  ..... 'X' ler sadelesti.

$3 + 2 = 1 + 3$ .....her iki tarafa '3' ilâve ettik.

$5 = 4$ .....buradan,

$5 = 2 + 2$ .....'4'ü, '2+2' seklinde yazdik. HATA NEREDE?

### Cantor Paradoksu:

George Cantor'a göre bir kümenin alt kümelerinin eleman sayisi, asil kümeden daha fazladir.

Ancak bu kaide, "Bütün kümelerin kümesi" için de geçerli midir?

"Bütün kümelerin kümesi", X olsun. Öyle ise her alt kümesi kendisinin elemanidir. X'in "Alt kümeleri kümesi" de X'in alt kümesidir. Yani:

$2^a \hat{=} X$  (2 üzeri a, alt küme X) dir. Buradan sunu yazabiliriz:

$\text{card}(2^a) \text{ card}(a)$ .....1

Çünkü alt kümelerin kardinali asil kümelerden küçüktür veya esittir. Ancak Cantor Teoremine göre:

$\text{card}(2^a) > \text{card}(a)$ .....2

olmalıdır. 1 ve 2 çelismektedir.

### Karışım Paradoksu:

Bir fincan sütümüz ve bir fincan da kahvemiz var. Bir kasik süttten aliyoruz ve kahve fincanina döküyoruz. iyice karistirip oradan da bir kasik aliyoruz ve süte döküyoruz. simdi sorumuz geliyor:

Kahvedeki süt mü yoksa sütteki kahve mi daha fazladir?

Cevap sasirtici gelebilir ama karisim oranlari esittir. iste ispati:

Kabul edelim ki karisimimiz homojen olmasin. Meselâ kahveye kattigimiz süt, tamamen dibe çöksün. Kahveden aldigimiz miktar tabi ki süttten aldigimize esit olacaktır. Veya:

ilk karisimdan sonra kasigimizin yarisi süt, yarisi da kahve olsun. Bu sefer yine sütte yarim kasik kahve, kahvede yarim kasik süt bulunacaktır. Veya:

ilk karisim homojen olsun. Aldigimiz bir kasik karisimin % 90 ini kahve, % 10 unu süt kabul edelim. Sütün % 90 i kahvede kalmistir. Sonuçta eksilen sütün yerini kahve dolduracagindan karisim oranlari esit olur.

### Bütün Sayılar Esittir Paradoksu:

a ve b birbirinden farklı herhangi iki tamsayı ve c de bunların farkı olsun:

$$a-b=c$$

$(a-b)(a-b)=c.(a-b)$ .....her iki tarafı  $(a-b)$  ile çarptık.

$$a^2-2ab+b^2=ac-bc$$
.....parantezleri açtık.

$$a^2-2ab+b^2-ac=-bc$$
.....ac yi sol tarafa attık.

$$a^2-2ab-ac=-bc-b^2$$
..... $b^2$  yi sağ tarafa attık.

$$a^2-ab-ac=ab-bc-b^2$$
..... $2ab$  nin birini sağ tarafa geçirdik.

$$a(a-b-c)=b(a-b-c)$$
.....a ve b parantezine aldık.

$$a=b$$
..... $(a-b-c)$  ler sadeleşti. ( $2+2=5$  Paradoksunun benzeri)

### Karışık Bir Hesap:

iki çocuk ayrı ayrı kalem satmaktadırlar. Her ikisinin de 30'ar tane kalemi vardır. Biri, 3 kalemi 10 TL'ye; diğeri de 2 kalemi 10 TL'ye vermektedir. ilki 30 kalemde 100 TL, diğeri de 150 TL kazanır. ( Toplam 250 TL.) Ertesi gün yine 30'ar kalemle evlerinden çıkarlar. Yolda karşılaştıklarında biri diğeriyle der ki:

- "Gel seninle ortak olalım. 60 (30+30) kalemin 5 (2+3) tanesini 20 (10+10) TL'ye satalım.

Kazandığımız parayı da paylaşırız. Basit bir hesapla 60 kalemde 240 TL kazanırlar. Yani:

$$5 \text{ Kalem} \dots\dots\dots 20 \text{ TL ise}$$

$$60 \text{ Kalem} \dots\dots\dots x \text{ TL'dir. Buradan;}$$

$$x=(60.20)/5= 240 \text{ TL}$$

Çocuklar, ayrı ayrı satış yaptıklarında toplam 250 TL kazanıyorlardı. Beraber sattıklarında neden 10 TL zarar ettiler?

$$1 \text{ kg} = 1 \text{ ton } \text{?}$$

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ gr} \dots\dots\dots (1)$$

$$2 \text{ kg} = 2000 \text{ gr} \dots\dots\dots (2)$$

(1) ve (2) çarpılırsa:

$$2 \text{ kg} = 2.000.000 \text{ gr}$$

$$2 \text{ kg} = 2.000 \text{ kg} \dots\dots\dots (2.000.000 \text{ gr} = 2.000 \text{ kg})$$

$$2 \text{ kg} = 2 \text{ ton} \dots\dots\dots (2.000 \text{ kg} = 2 \text{ ton}). \text{ Dolayısıyla,}$$

$$1 \text{ kg} = 1 \text{ ton}$$

### **Hempel Paradoksu:**

Carl Hempel'e göre "Bütün kuzgunlar siyahtir!"

Bu önermeyi iki şekilde ispatlayabiliriz:

a) Çok sayıda kuzgun görüp, hepsinin de siyah olduğunu tesbit ederek,

b) Siyah olmayan şeylerin, aynı zamanda kuzgun da olmadığını görerek.

Bilinen şu ki çok sayıda siyah kuzgun ve yine çok sayıda siyah olmayan, aynı zamanda kuzgun da olmayan cisim vardır. Siyah olmayan tüm cisimler incelenmeden bu fikre varamayız. Kırmızı cisimler için bu uygulama yapılmamışsa "bazı kuzgunlar kırmızı" da olabilir. Bu sebeplerden Hempel paradoksu, "Tümevarım" in itibarını sarsmıştır.

### **Arnauld Paradoksu:**

Herkes bilir ki;

(Büyük Sayı / Küçük Sayı) <sup>1</sup> (Küçük Sayı / Büyük Sayı) dir.

(5 / 2) <sup>1</sup> (2 / 5) gibi

Ancak negatif sayılar bu kuralı bozar:

(3 / -3) = (-3 / 3)

Ayrıca;

(Büyük Sayı / Küçük Sayı) > 1 dir.

(4 / 3) > 1 gibi

Yine negatif sayılar için kural ihlâl edilir:

(3 / -1) < 1

Bu durum, matematikçi Arnauld'a mantıksız geldiği için negatif sayıların olmadığına hükmetti.

### **Berber Paradoksu:**

Klasik paradokslardan biri daha:

Bir berber, bulunduğu köydeki erkeklerden, yalnızca kendi kendini tras edemeyen erkekleri tras ediyor. Berberi kim tras edecek?

Kendi kendine tras olsa; kendisini tras edebildiği için tanıma ters düşecek. Baskısı tras etse; o kişi kendi kendine de tras olabiliyor demektir. (bkz Russel Paradoksu)

### **Russel Paradoksu:**

1970 yılında 98 yaşında ölen Bertrand RUSSEL'in çok bilinen paradoksu:

"Bir odada papa ve ben varım. Odada kaç kişiyiz?" Cevap:

"Bir kişiyiz. Çünkü ben, aynı zamanda papayım"

Russel'in "Kümeler" Paradoksu:

Russel'a göre iki çeşit küme var:

a) Kendisinin elemanı olan (ihtiva eden) kümeler.

b) Kendisinin elemanı olmayan kümeler.

şimdi, "Kendisinin elemanı olmayan kümeler" in kümesine 'X' diyelim. X, kendisinin elemanı midir?