2.6. DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ

$$ax_1 + bx_2 = \alpha$$
$$cx_1 + dx_2 = \beta$$

gibi bir doğrusal denklem sistemini, x ve y bilinmeyenler olmak üzere, çözmeyi hepimiz biliyoruz. Ama probleme farklı bir açıdan yaklaşarak doğrusal bir denklem sistemini çözmenin anlamını görelim. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ olmak üzere denklemi matris notasyonuyla Ax = z olarak yazabiliriz. A matrisi denklem sisteminde bilinmeyenlerin katsayılarından oluşan **katsayı matrisi**, x vektörü bilinmeyenlerin, z vektörü de parametre vektörüdür. Şimdi, denklem sisteminin

$$x_1 \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

olarak yazılabileceği açıktır. İşte, sistemi çözmek z parametre vektörünü A katsayı matrisinin sütunlarının doğrusal bileşim olarak yazacak şekilde x_1, x_2 katsayıları bulmak demektir. Yani, z vektörü ile A nın sütunları doğrusal bağımlı olmalıdır. Dolayısı ile $\{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\}$ vektör kümesinin doğrusal bağımlı olup olmadığına, yani $C = \begin{bmatrix} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \end{bmatrix}$ matrisinin rankına bakmak gerekiyor. Burada C matrisi, parametre vektörünün A katsayı matrisine sonuncu sütun olarak eklenmesinden elde edilen **genişletilmiş katsayı matrisidir**. Şimdi, burada üç durum söz konusu olabilir.

1) r(A) = 2 dir, yani A nın sütunları doğrusal bağımsızdır. Ama R^2 de en fazla iki doğrusal bağımsız vektör vardır, dolayısı ile r(C) = r(A) = 2 = bilinmeyen sayısıdır. Sistemin tek bir çözümü vardır. Çünkü A nın sütunları doğrusal bağımsızsa R^2 nin bir tabanını oluştururlar ve tanım gereği herhangi bir parametre vektörü, her $z \in R$, bu tabanın vektörlerine göre ifade edilebilir ve bu ifade tektir. Örneğin,

$$x_1 + x_2 = 2$$
$$x_1 - 2x_2 = 1$$

sisteminde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. det A = -3 olduğundan A nın sütunları doğrusal

bağımsızdır. Öyleyse $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin rankı da 2 dir. Yani r(A) = r(C) = 2 dir. Bu sistemin tek bir çözümü vardır ve $x_1 = 5/3$, $x_2 = 1/3$ dür. Yani, $z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dir.

2. r(A) = 1 dir, A nın sadece bir doğrusal bağımsız sütunu vardır. O halde $C = \begin{bmatrix} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \end{bmatrix}$ matrisinin rankına ilişkin iki durum olabilir.

a) r(C) = r(A) = 1 < bilinmeyen sayısıdır. Dolayısı ile parametre vektörü ile A nın sütunları doğrusal bağımlıdır ve denklemin bir çözümü vardır. Bu durumda A nın sadece bir doğrusal bağımsız sütunu olduğu için, parametre vektörünü bu sütun cinsinden ifade etmenin sonsuz yolu vardır. İki bilinmeyenden birine keyfi değer vererek, diğerini çözebiliriz. Örneğin,

$x_1 + x_2 = 2$
$2x_1 + 2x_2 = 4$

sisteminde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, z = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ dir. det A = 0 olduğundan A nın sütunları doğrusal bağımlıdır ve r(A) = 1 dir. Öte yandan $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin rankı da 1 dir. Yani r(A) = r(C) = 1 dir. Bunu anlamı iki denklemin doğrusal bağımlı, yani elimizde sadece bir denklem olduğudur. Gerçekten de denklemlere bakılınca ikincinin birincinin iki katı olduğu, dolayısı ile elimizde sadece

$x_1 + x_2 = 2$

denkleminin olduğu görülür. O halde, örneğin, $x_2 = \alpha$ olmak üzere, $x = \begin{pmatrix} 2-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ biçimindeki her vektör denklemin çözümüdür. Örneğin, $\alpha = 1$ koyarak $x_1 = 1$, $x_2 = 1$; $\alpha = 2$ koyarak $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; $\alpha = 5$ koyarak $x_1 = -3$, $x_2 = 5$; gibi çözümler elde ederiz. Yani her $\alpha \in R$ değeri için bir çözüm vardır ve bu anlamda çözümler sonsuzdur. Ama en azından çözümü parametrik olarak, yani bir α'ya bağlı olarak, bulabiliyoruz.

b) r(C) = 2 > r(A) dır. A nın sütunları ile parametre vektörü doğrusal bağımsızdır. O halde denklemin çözümü yoktur: parametre vektörünü A nın sütunlarının bir doğrusal bileşimi olarak yazamayız—ki bu da doğrusal bağımsızlığın tanımıdır. Örneğin,

$x_1 + x_2 = 2$
$2x_1 + 2x_2 = 2$

sisteminde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, z = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dir. det A = 0 olduğundan A nın sütunları doğrusal bağımlıdır.

Öte yandan $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin rankı 2 dir. Yani r(C) = 2 > r(A) = 1 dir. Denklemler tutarsızdır ve çözümü yoktur. Gerçekten de ikinci denklemi iki ile bölünce $x_1 + x_2 = 1$ elde edilir ve hem bu hem birinci denklem doğru olamaz.

Buradan anlaşılacağı gibi katsayı matrisinin sütunları doğrusal bağımlıysa parametre vektörüne bağlı olarak çözüm olabilir (ama tek değildir) ya da olmayabilir. İki bilinmeyenli durumdan öğrendiklerimiz genel halde de geçerlidir. Genel bir n bilinmeyenli m denklemli sistem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= z_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= z_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n &= z_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= z_m \end{aligned}$$

olacaktır. Burada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_m \end{pmatrix}, C = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & z_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & z_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & z_m \end{bmatrix}$$ olmak üzere A = katsayı (m x n)

matrisi, $z \in R^m$ = parametre vektörü, C = genişletilmiş katsayı matrisidir. Dolayısı ile sistemi, $x \in R^n$ olmak üzere **Ax = z** olarak yazabiliriz. Sistemin çözmek demek z vektörünü A nın sütunlarının doğrusal bileşimi yapacak şekilde x_i katsayıları bulmak demektir. Bunun olabilmesi için z ile A nın sütunlarının doğrusal bağımlı olması gerekir. Bunu da C matrisinin rankına bakarak anlıyoruz. Eğer r(C) = r(A) ise z vektörünü A nın sütunlarına katmak rankı arttırmıyor, yani doğrusal bağımsız vektör sayısı aynı kalıyor, dolayısı ile C nin sütunları doğrusal bağımlıdır demektir. Yok eğer r(C) > r(A) ise çözüm yoktur.

Teorem 2.11. A (m x n) katsayı matrisi, $z \in R^m$ parametre vektörü, $x \in R^n$ olmak üzere n bilinmeyenli, m denklemli doğrusal denklem sistemi Ax = z verilsin. C, A matrisine z parametre vektörünü sonuncu sütun olarak ekleyerek elde edilen genişletilmiş katsayı matrisi olsun. Öyleyse,

1. r(C) > r(A) ise sistem tutarsızdır çözüm yoktur.
2. r(C) = r(A) ise çözüm vardır ve
   a) r(C) = r(A) = n ise çözüm tektir.
   b) r(C) = r(A) < n ise (n – r(A)) değişkenin değeri keyfi olmak üzere kalan r(A) değişkenin değeri parametrik olarak bulunur. Sonsuz çözüm vardır.

Uyarı:

1. A (m x n) bir matris olduğuna göre r(A) ≤ min(m, n) dir. Dolayısı r(C) = r(A) olduğunda m < n ise, yani denklem sayısı bilinmeyen sayısından az ise, çözüm tek olamaz. Eğer n ≤ m ise r(A) = n ve çözüm tek olabilir.
2. Eğer katsayı matrisi A (n x n) kare bir matris ve r(A) = n ise C matrisini kurup rankına bakmanın gereği yoktur. C nin rankına parametre vektörü ile A nın sütunlarının doğrusal bağımlı olup olmadığını görmek için bakıyoruz. Eğer r(A) = n ise A nın sütunları doğrusal bağımsızdır, R^n in bir tabanını oluşturur ve dolayısı ile her $z \in R^n$ bunlarla doğrusal bağımlıdır, yani r(C) = r(A) = n dir ve bu durumda tek bir çözüm vardır: $x = A^{-1}z$ dir. A^{-1} ters matrisi ise r(A) = n olan bir (n x n) matrisi için her zaman vardır (Teorem 2.10). Eğer r(A) < n ise C matrisinin rankına bakıp sistemin çözümü olup olmadığını görmek gerekir.

Örnek 2.10.

i. $x_1 + x_2 = 1$
$x_1 - x_2 = 0$
$x_1 - 2x_2 = 2$

denklem sisteminde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ dir. r(A) = 2 ve detC = -5 olduğu için de r(C) = 3 olur. Dolayısı ile r(C) > r(A) dır ve sistemin çözümü yoktur. Gerçekten de ilk iki denklemi çözersek $x_1 = x_2 = 0.5$ çıkar ama bu değer son denklemi sağlamaz. Öte yandan son iki denklemi çözersek $x_1 = x_2 = -2$ olur ama bu değer de ilk denklemi sağlamaz. Bir denklem sisteminin tutarsız olmasının anlamı budur.

ii. $x_1 + x_2 = 2$
$x_1 - x_2 = 0$
$x_1 - 2x_2 = -1$

denklem sisteminde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ dir. r(A) = 2 = r(C) dir (detC = 0 olduğuna dikkat ediniz). Bilinmeyen sayısı da iki olduğuna göre denklemin tek bir çözümü vardır. Örneğin, ilk iki denklemden $x_1 = x_2 = 1$ bulunur ve bu değerler son denklemi de sağlar. Son iki denklemden, ya da birinci ve üçüncü denklemlerden de $x_1 = x_2 = 1$ bulunacağına dikkat ediniz. Dolayısı ile tek çözümü olan bir sistemde herhangi bir r(A) sayıda doğrusal bağımsız denklem alındığında aynı çözüm bulunur.

iii. $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$
$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$
$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$

denklem sisteminde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ dir. r(A) = 3 = r(C) dir (A matrisinin son üç sütunundan oluşan almatrisin determinantı sıfırdan farklıdır dolayısı ile A nın üç doğrusal bağımsız sütunu vardır. R^3 de en fazla üç vektör doğrusal bağımsız olduğuna göre C matrisinin de 3 doğrusal bağımsız sütunu vardır). Dolayısı ile sistem tutarlıdır ve çözüm vardır, ama r(A) < n = 4 (bilinmeyen sayısı) olduğu için tek değildir. r(A) = 3 bilinmeyeni diğer bilinmeyeni parametrize ederek çözebiliriz. Bunun için üç doğrusal bağımsız denklem seçmek gerekir. A nın son üç sütunu ve dolayısıyla satırı doğrusal bağımsız olduğuna göre $x_1 = \alpha$ koyarak

$x_2 + x_3 + x_4 = 1 - 2\alpha$
$2x_2 - x_3 + x_4 = -\alpha$
$-x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 - \alpha$

üç denklem ve bilinmeyenli parametrik denklem sistemi elde ederiz. Bu sistemin katsayı matrisi tekil olmayan bir matristir o halde çözüm vardır ve tektir, yani her α değeri için tek bir çözüm vardır.

iv. $x_1 + x_2 = 0$
$x_1 - x_2 = 0$

denklem sisteminde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ dir ve detA ≠ 0 olduğundan Teorem 2.10 uyarınca Ax = **0** ancak ve ancak x = **0** olacaktır. Böyle parametre vektörünün sıfır vektör olduğu sistemlere **homojen denklem sistemi** denir. Bu durumda C matrisini kurup rankına bakmanın anlamı yoktur, çünkü sıfır vektör her vektör gurubuyla doğrusal bağımlıdır. Katsayı matrisinin kare matris olduğu homojen denklem sistemlerinde önemli olan r(A) dır. Eğer r(A) = n ise tek çözüm vardır o da sıfır vektördür. Sistemin x ≠ **0** olacak şekilde sıfırdan farklı bir çözümü olabilmesi için detA = 0, r(A) < n olmalıdır. Örneğin,

$x_1 - x_2 = 0$
$x_1 - x_2 = 0$

sisteminde katsayı matrisi tekildir. Sadece bir doğrusal bağımsız denklem vardır: $x_1 - x_2 = 0$. Bunun çözümü de $x_1 = x_2$ olan bütün vektörlerdir. Çözüm x = α(1, 1) dir. Yani düzlemde orijinden ve (1, 1) noktasından (vektöründen) geçen doğru üzerindeki her vektör çözümdür.

v. $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$
$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

homojen denklem sisteminde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ dir ve detA = 0 dır. Dolayısı ile bu sistemin sıfırdan farklı bir çözümü vardır. r(A) = 2 olduğuna göre iki doğrusal bağımsız denklem vardır (örneğin ilk iki denklem) ve bunları kullanarak değişkenlerden birini parametrize ederek çözümü buluruz. Örneğin, $x_3 = \alpha$ koyarsak ilk iki denklemden

$2x_1 + x_2 = -\alpha$
$x_1 + 2x_2 = \alpha$

buradan da $x_1 = -\alpha$, $x_2 = \alpha$ buluruz. Dolayısı ile $x = \alpha(-1, 1, 1)$ vektörü her α için bu sistemi çözer. Burada doğrusal bağımsız herhangi iki denklemi aldığımızda aynı sonucu bulacağımıza dikkat ediniz. Bir-üç ve iki-üç denklemlerini kullanarak bunu göstermeyi okuyucuya bırakıyoruz.

vi. $2x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$
$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

denklem sisteminde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ve detA $\neq 0$ dır. r(A) = 3 dır ve sistemin tek bir çözümü vardır. Burada C matrisini kurup rankına bakmaya gerek yoktur. Çünkü C (3 x 4) bir matristir, $r(C) \leq 3$ olmalıdır ve A nın üç doğrusal bağımsız sütunu, R^3 de de en fazla 3 doğrusal bağımsız vektör olduğuna göre r(C) = 3 olmalıdır. Dolayısı ile çözüm $x = A^{-1}z$ dir. Bu örnekte A^{-1} hesaplayıp çözümü bulmayı okuyucuya bırakıyoruz.

vii. $2x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$
$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$

denklem sisteminde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ve detA = 0, r(A) = 2 dir. O halde $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin rankına bakmak gerekiyor. r(C) = 3 dür (C nin son üç sütunundan oluşan determinant sıfırdan farklıdır). r(C) > r(A) olduğundan sistemin çözümü yoktur.

viii. $2x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$
$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5$

denklem sisteminde $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 2\end{bmatrix}$ ve detA = 0, r(A) = 2 dir. O halde $C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 2 & 5\end{bmatrix}$ matrisinin rankına bakmak gerekiyor. r(C) = 2 dir. r(C) = r(A) < n olduğundan bir değişkeni keyfi olarak belirleyip diğer ikisini çözebiliriz. Burada ilk iki denklem doğrusal bağımsız olduğundan $x_3 = \alpha$ koyarak

$2x_1 + x_2 = 2 - \alpha$
$x_1 + 2x_2 = 3 - \alpha$

elde ederiz. Yeni denklem sisteminin katsayı matrisinin, $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, tekil olmayan matris olduğuna dikkat ediniz. Dolayısı ile denklemin tek bir çözümü vardır ve bulunması alıştırma olarak bırakılmıştır.

Şimdi, katsayı matrisi (n x n) kare matris olan bir denklem (n denklem ve n bilinmeyenli) sisteminin tek çözümü olması için A nın tekil olmayan bir matris olması gerektiğini, yani detA ≠ 0, olması gerektiğini gördük. Denklem sistemi Ax = z ise çözüm $x = A^{-1}z$ dir. Öte yandan A^{-1} = (1/detA)eşA dır. Bunun anlamını görmek için (3 x 3) bir sistem varsayalım. O halde $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}, A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}$ ve

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}z=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}$$ olur.

Buradan da

$x_1 = (1/\det A)(z_1A_{11} + z_2A_{21} + z_3A_{31})$
$x_2 = (1/\det A)(z_1A_{12} + z_2A_{22} + z_3A_{32})$
$x_3 = (1/\det A)(z_1A_{13} + z_2A_{23} + z_3A_{33})$

elde edilir. Şimdi x_1 çözümünde parantez içindeki ifadenin $B_1=\begin{bmatrix}z_1 & a_{12} & a_{13}\\ z_2 & a_{22} & a_{23}\\ z_3 & a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}$ matrisinin determinantı olduğuna dikkat ediniz. Bu matris A matrisinin birinci sütununun z vektörüyle değiştirilmiş halidir. Matrisin determinantını birinci sütun üzerinden Laplace açılımı ile hesaplarsak $\det B_1 = z_1A_{11} + z_2A_{21} + z_3A_{31}$ olur. Çünkü B_1 matrisinin birinci sütun elemanlarının kofaktörleri birinci sütunun çıkarılması ile elde edilir ve bu sütun dışında A ve B_1 matrisleri aynıdır. Dolayısı ile A nın ve B_1 in birinci sütun elemanlarının kofaktörleri aynıdır. O halde $x_1 = \det B_1/\det A$ olarak hesaplanabilir. Benzer şekilde $x_2 = \det B_2/\det A$ dır ve B_2, A nın ikinci sütununun z parametre vektörü ile değiştirilmesiyle elde edilir. A nın üçüncü

sütununu z parametre vektörü ile değiştirerek B_3 elde edilir ve $x_3 = \det B_3/\det A$ olur. Burada yapılan işlem **Cramer kuralı** olarak bilinir.

Teorem 2.12. A (n x n) tekil olmayan bir matris olmak üzere Ax = z denklem sisteminin çözümü Cramer kuralıyla $x_i = \det B_i/\det A$ olarak bulunur. Burada B_i (n x n) matrisi A katsayı matrisinin i^{inci} sütununun z parametre vektörü ile değiştirilmesiyle elde edilir.

Cramer kuralı büyük boyutlu sistemlerde çok kullanışlı bir yöntem değildir, çünkü yüksek mertebeden bir çok determinant hesaplanmasını gerektirir. Ama analitik iktisadi uygulamalarda önemli avantajlar sağlar.

Örnek 2.11.

i. Örnek 10 (vi) de çözümünü okuyucuya bıraktığımız

$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$
$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

denklem sisteminde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ve detA = 6 dır. Burada

$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\det B_1 = 2$, $\det B_2 = 2$, $\det B_3 = 0$

olmaktadır. Dolayısı ile Cramer kuralıyla $x_1 = \det B_1/\det A = 1/3$; $x_2 = \det B_2/\det A = 1/3$, $x_3 = \det B_3/\det A = 0$ çözümü bulunur.

ii. $x_1 + x_2 = \alpha$
$x_1 + 2x_2 = \beta$

parametrik denklem sisteminde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ve detA = 1 dir. Burada $B_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$ dır. $\det B_1 = 2\alpha - \beta$, $\det B_2 = \beta - \alpha$ olduğundan Cramer kuralıyla

$x_1 = \dfrac{\det B_1}{\det A} = 2\alpha - \beta$ ve $x_2 = \dfrac{\det B_2}{\det A} = \beta - \alpha$ olur. Çözümlerin α ve β parametreleri cinsinden elde edildiğine dikkat ediniz.

iii. Örnek 10 (viii) de çözümünü okuyucuya bıraktığımız

$2x_1 + x_2 = 2 - \alpha$
$x_1 + 2x_2 = 3 - \alpha$

parametrik denklem sisteminin çözümü de bir önceki örneği takip ederek
$x_1 = \dfrac{\det B_1}{\det A} = \dfrac{1-\alpha}{3}$ ve $x_2 = \dfrac{\det B_2}{\det A} = \dfrac{4-\alpha}{3}$ olarak bulunur.

iv. Örnek 10 (iii) de elde edilen

$x_2 + x_3 + x_4 = 1 - 2\alpha$
$2x_2 - x_3 + x_4 = -\alpha$
$- x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 - \alpha$

sistemini Cramer kuralıyla çözelim. Burada detA = 3,

$B_1 = \begin{bmatrix} 1-2\alpha & 1 & 1 \\ -\alpha & -1 & 1 \\ 2-\alpha & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ve det $B_1 = 3(1 - \alpha)$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1-2\alpha & 1 \\ 2 & -\alpha & 1 \\ -1 & 2-\alpha & -1 \end{bmatrix}$ ve det$B_2 = 3(1 - \alpha)$,

$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1- 2a \\ 2 & - 1 & - a \\ 1 & 2 & 2- a \end{bmatrix}$ ve det$B_3 = -3$ olur. O halde $x_2 = \det B_1/\det A = 1 - \alpha$; $x_3 = \det B_2/\det A = 1 - \alpha$, $x_4 = \det B_3/\det A = -1$ olur.

A (m x n) bir matris, $x \in R^n$ olmak üzere Ax = **0** homojen denklem sisteminin x = **0** olmak üzere bir çözümü her zaman vardır. Sistemin $x \neq$ **0** bir çözümü olması için r(A) < min(m, n) olması gerektiğini gösteriniz. Aşağıdaki homojen sistemlerin çözümlerini bulunuz:

i. $ax_1 + x_2 = 0$
$2x_1 + bx_2 = 0$

denkleminin a ve b nin hangi değerleri için sıfırdan farklı bir çözümü vardır ve çözüm nedir?

ii. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$
$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

iii. $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$
$2x_1 + x_2 + 2x_4 = 0$

iv. $ax_1 + x_2 + x_3 = 0$
$bx_2 - x_3 = 0$
$cx_3 = 0$

sisteminin a, b ve c nin hangi değerleri için sıfırdan farklı bir çözümü vardır ve çözüm nedir?

v. $ax_1 + x_2 + x_3 = 0$
$bx_2 - x_3 = 0$
$x_1 - cx_3 = 0$

sisteminin a, b ve c nin hangi değerleri için sıfırdan farklı bir çözümü vardır ve çözüm nedir?

2. Aşağıdaki denklem sistemlerinin çözümü olup olmadığını belirleyiniz. Çözümü olan sistemleri Cramer kuralıyla çözünüz.

i. $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$
$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$
$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$

ii. $x_1 + x_2 = \alpha$
$x_1 - x_2 = 0.$

iii. $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1$
$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$
$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0.$

iv. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$
$2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$
$-x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2.$
$-x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 2.$

v. $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$
$3x_1 + 2x_3 = 2.$