İçindekiler

Önsöz ..... **vii**

Türev ve Kuralları ..... **2** — **1. ÜNİTE**
TÜREV VE İKTİSADİ ANALİZ 3
LİMİT VE SÜREKLİLİK 3
Limit Kavramı 4
Sağdan Limit 4
Soldan Limit 4
Bir Fonksiyonun Limitinin Bulunması 5
Limitin Özellikleri 5
Süreklilik 7
TÜREV 8
Değişimi Oranı ve Türev 8
Türevi Alınabilir Fonksiyonlar 10
Türevin Anlamı 10
TÜREV ALMA KURALLARI 11
Sabit Fonksiyon Kuralı 11
Kuvvet Fonksiyonu Kuralı 11
Toplam Kuralı 12
Çarpım Kuralı 12
Bölüm Kuralı 12
Zincir Kuralı 13
Üstel Fonksiyon Kuralı 14
Logaritmik Fonksiyon Kuralı 14
Trigonometrik Fonksiyon Kuralı 16
Kapalı Foksiyon Kuralı 16
İKİNCİ VE DAHA YÜKSEK DERECEDEN TÜREVLER 17
MARJİNAL FONKSİYONLAR 18
Marjinal Hasıla 19
Marjinal Maliyet 23
Marjinal Ürün 24
ESNEKLİK 26
TÜKETİM VE TASARRUF 29
Özet 30
Kendimizi Sınayalım 31
Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı 32
Sıra Sizde Yanıt Anahtarı 32
Yararlanılan Kaynaklar 33

Tek Değişkenli Fonksiyonlar ..... **34** — **2. ÜNİTE**
FONKSİYON KAVRAMI VE FONKSİYONLA İLİŞKİLİ TEMEL KAVRAMLAR 35
Fonksiyonla İlişkili Temel Kavramlar 36
Fonksiyonların Grafiklerinin Çizilmesi 38
FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ 39
Artan ve Azalan Fonksiyonlar 39
Monoton, Kesin Monoton ve Monoton Olmayan Fonksiyon 39
Birebir Fonksiyon 40
Ters Fonksiyon 40
Minimum ve Maksimum Noktalar 40
Ortalama Değişim Oranı 40
Bükeylik 41
DOĞRUSAL FONKSİYONLAR 42
Doğrusal Fonksiyonun Eğimi 42

Nokta-Eğim Formülü ... 43
Nokta-Nokta Formülü ... 43
Doğrusal Fonksiyonların İktisadi Uygulamaları ... 43
Arz ve Talep Fonksiyonları ... 44
Piyasa Dengesi ... 45
Esneklik ... 46
Yay Esnekliği ... 46
Nokta Esnekliği ... 46
KARESEL (KUADRATİK) FONKSİYONLAR ... 48
Karesel Fonksiyonların Çözümü ... 48
Karesel Fonksiyonların Grafiği ... 49
Karesel Fonksiyonların İktisadi Uygulamaları ... 50
Arz ve Talep Fonksiyonları ... 50
Hasıla, Maliyet ve Kar Fonksiyonları ... 51
Özet ... 55
Kendimizi Sınayalım ... 56
Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı ... 57
Sıra Sizde Yanıt Anahtarı ... 57
Yararlanılan Kaynaklar ... 58

3. ÜNİTE

Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar ... 60
ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLARA GİRİŞ ... 61
BİLEŞİK FAİZ VE e (DOĞAL SAYI) SAYISI ... 62
Logaritmik Fonksiyon ... 65
İKTİSAT UYGULAMALARI ... 67
Bileşik Faiz ... 67
Üstel Azalma ... 68
Türevler ... 69
Lojistik Eğrisi ... 69
Esneklik ... 70
Fiyat Esnekliği ... 71
Toplam Hasıla ... 72
Ters Talep ... 72
Marjinal Hasıla ... 72
Esneklik ve Logaritma ... 73
Diğer Esneklikler ... 74
Özet ... 76
Kendimizi Sınayalım ... 77
Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı ... 78
Sıra Sizde Yanıt Anahtarı ... 78
Yararlanılan Kaynaklar ... 79

4. ÜNİTE

Eşanlı Denklem Sistemleri ... 80
DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ ... 81
Eğim-Kesişim Formunu Kullanarak Çözüm ... 81
İkame (Yerine Koyma) Metodu ... 82
DOĞRUSAL DENKLEMLERİN İKAME (YERİNE KOYMA) METODUYLA ÇÖZÜMÜ ... 83
Doğrusal denklem Sisteminde Eşitlikleri ve Bilinmeyenleri Sayma ... 83
En Küçük Durum: İki Eşitlik ve İki Bilinmeyen ... 84
En Sık Karşılaşılan Durum: Üç Eşitlik ve Üç Bilinmeyen ... 85
Üç Eşitlik ve Üç Bilinmeyenli Denklem Sistemlerinin Çözüm Aşamaları ... 85
Daha Fazla Eşitlik ve Daha Fazla Bilinmeyen ... 86
Daha Fazla Örnek Çözüm ... 87
Eleme Metodu ... 89
Eşzamanlı Denklemlerde Çözümün Varlığı ve Tekliği ... 90

Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Denklem Sistemleri ve Çözümler 91
DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİNİN EKONOMİK UYGULAMALARI .. 91
Arz ve Talep Modeli 91
Talep 91
Talep Eğrisi (Doğrusu) 92
Arz 92
Arz Eğrisi 92
Arz, Talep ve Piyasa Dengesi 93
Piyasa Dengesinin Grafiksel Gösterimi 93
Dengesizlik Durumu (qD > qS) 94
KARŞILAŞTIRMALI STATİK DENGE ANALİZİ 94
Tüketici Gelirinin Artması ve Dengenin Değişmesi 95
Vergi Politikası ve Piyasa Dengesinin Değişmesi 96
Doğrusal Denklemler ve Makroekonomik Denge 98
Modelin Anahtar İlişkisi 98
Karşılaştırmalı Durağanlık 100
DOĞRUSAL İKTİSADİ MODELLERE İLİŞKİN ÖRNEK ÇÖZÜMLER 101
Piyasa Dengesinin Bulunması ile İlgili Örnekler 101
Tüketim Vergileri ve Piyasa Dengesine Etkisi ile İlgili Örnekler 101
Ulusal Gelirin Belirlenmesi ile İlgili Örnek 102
Özet 103
Kendimizi Sınayalım 104
Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı 105
Sıra Sizde Yanıt Anahtarı 106
Yararlanılan Kaynaklar 107

Matrisler ve Denklem Sistemlerinin Matrislerle Çözümü .. 108 — **5. ÜNİTE**
GİRİŞ 109
MATRİSLERLE İLGİLİ TANIMLAR VE TERİMLER 109
TEMEL MATRİS İŞLEMLERİ 113
Matrislerin Eşitliği 113
Matrislerde Toplama ve Çıkarma 114
Matrisin İz Değeri 115
Matrislerde Çarpma 115
Matrisin Bir Sayı ile Çarpımı 115
Matrislerin Çarpımı 115
Matris İşlemlerinin Yasaları 117
Matrisin Evriği 117
TERS MATRİSİN BULUNMASI 118
Gauss Eleme Yöntemi veya Pivot Yöntemi 118
Ek Matris Yöntemi 120
DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ 124
Ters Matris Yöntemi 124
Gauss Eleme Yöntemi 126
Cramer Kuralı 128
Özet 130
Kendimizi Sınayalım 132
Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı 133
Sıra Sizde Yanıt Anahtarı 134
Yararlanılan Kaynaklar 136

Çok Değişkenli Fonksiyonlar ..... 138 — **6. ÜNİTE**
ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYON KAVRAMI 139
İki Değişkenli Fonksiyonlar 139
İki Değişkenli Fonksiyonun Tanım Kümesi 140
İki Değişkenli Fonksiyonun Grafiği 140

İkiden Fazla Değişkenli Fonksiyonlar ... 141
KISMİ TÜREV ... 141
İkinci Dereceden Kısmi Türevler ... 142
ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN İKTİSADİ UYGULAMALARI ... 145
Esneklikler ... 145
Fayda Fonksiyonu ... 146
Üretim Fonksiyonu ... 148
Üretim Fonksiyonunun Homojenliği ve Ölçeğe Göre Getiri ... 149
Euler Teoremi ... 150
Azalan Marjinal Ürün ... 150
Kâr Fonksiyonu ... 151
Özet ... 152
Kendimizi Sınayalım ... 154
Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı ... 155
Sıra Sizde Yanıt Anahtarı ... 156
Yararlanılan Kaynaklar ... 157

7. ÜNİTE

Kısıtsız Optimizasyon ... 158
OPTİMİZASYON ... 159
TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA KISITSIZ ... 159
OPTİMİZASYON ... 159
Yerel Maksimum ve Minimum İçin Birinci Türev Yöntemi ... 160
Yerel Maksimum ve Minimum İçin İkinci Türev Yöntemi ... 160
ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA KISITSIZ OPTİMİZASYON ... 163
İki Değişkenli Fonksiyonlarda Kısıtsız Optimizasyon ... 163
Üç Değişkenli Fonksiyonlarda Kısıtsız Optimizasyon ... 166
Özet ... 170
Kendimizi Sınayalım ... 171
Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı ... 172
Sıra Sizde Yanıt Anahtarı ... 173
Yararlanılan Kaynaklar ... 174

8. ÜNİTE

Kısıtlı Optimizasyon ... 176
GİRİŞ ... 177
KISITLI OPTİMİZASYON ... 178
Yerine Koyma Metodu İle Kısıtlı Optimizasyon ... 178
Toplam Diferansiyel Yaklaşımı İle Kısıtlı Optimizasyon ... 179
Lagrange Çarpanı Metodu İle Kısıtlı Optimizasyon ... 180
Lagrange Çarpanı'nın Anlamı ... 182
ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA KISITLI OPTİMİZASYON ... 183
ÇOK DEĞİŞKENLİ ÇOK KISITLI FONKSİYONLARDA OPTİMİZASYON ... 183
İKİNCİ DERECEDEN KOŞULLAR ... 184
KISITLI OPTİMİZASYON İLE İKTİSADİ UYGULAMALAR ... 185
Tüketicinin Fayda Maksimizasyonu ... 185
Tüketicinin Harcama Minimizasyonu ... 188
Firmalarda Kısıtlı Optimizasyon ... 190
Maliyet Minimizasyonu ... 190
Üretim Maksimizasyonu ... 191
Özet ... 192
Kendimizi Sınayalım ... 193
Yaşamın İçinden ... 195
Okuma Parçası ... 195
Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı ... 196
Sıra Sizde Yanıt Anahtarı ... 196
Yararlanılan Kaynaklar ... 197

MATEMATİKSEL İKTİSAT

1

Amaçlarımız

Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- Limit ve süreklilik kavramlarını açıklayarak, fonksiyonların limitlerini bulabilecek,
- Türevin matematiksel ve iktisadi anlamını açıklayarak, fonksiyonların türevlerini alabilecek,
- Marjinal kavramını açıklayabilecek,
- Türevi iktisadi analize uygulayabilecek

bilgi ve becerilere sahip olacaksınız.

Anahtar Kavramlar

- Limit
- Süreklilik
- Değişim oranı
- Türev
- Artan ve azalan fonksiyon
- Monoton fonksiyon
- İçbükey ve dışbükey fonksiyon
- Marjinal fonksiyon
- Esneklik
- Marjinal tüketim eğilimi
- Marjinal tasarruf eğilimi

İçindekiler

Matematiksel İktisat → Türev ve Kuralları

- TÜREV VE İKTİSADİ ANALİZ
- LİMİT VE SÜREKLİLİK
- TÜREV
- TÜREV ALMA KURALLARI
- İKİNCİ VE DAHA YÜKSEK DERECEDEN TÜREVLER
- MARJİNAL FONKSİYONLAR
- ESNEKLİK
- TÜKETİM VE TASARRUF

Türev ve Kuralları

TÜREV VE İKTİSADİ ANALİZ

Matematikteki türev kavramı, iktisadi analizde çok önemli bir yer işgal etmektedir. Birçok iktisadi kavram, ancak türev yardımıyla ifade edilebilmektedir. Bu nedenle türev kavramı, iktisadi analizleri matematik yardımıyla yapabilmemiz için önemli bir araç olarak karşımıza çıkmaktadır. İktisatçıların cevap aradıkları birçok soru, aslında türev kavramı ile ifade edilebilecek niteliktedir. Aşağıda iktisat literatüründe karşılaştığımız bazı sorular sıralanmıştır:

- Acaba bir yıl daha fazla okula gitmenin bireylerin ortalama ücretlerine etkisi ne kadardır?
- Bir malın fiyatındaki 1 liralık artış, mala olan talebi ne kadar azaltacaktır?
- Döviz kurlarındaki 1 kuruşluk artış, net ihracatı ne yönde ve hangi miktarda değiştirecektir?
- Üretim miktarındaki bir birimlik artış, toplam maliyetleri ne kadar artıracaktır?
- Vergi oranındaki %1'lik bir artış, vergi hasılasını artıracak mıdır, yoksa azaltacak mıdır?

Bütün bu sorular, matematikteki türev kavramına karşılık gelmektedir. Ayrıca, iktisatta çok sık kullanılan analiz yöntemlerinden biri olan "karşılaştırmalı statik analiz"in gerçekleştirilebilmesi için, türev kavramına ihtiyacımız vardır.

Bu bölümde tek değişkenli fonksiyonların türevleri ele alınacaktır. Öncelikle, türev kavramını anlayabilmemiz için gerekli olan limit ve süreklilik kavramlarını göreceğiz. Bu kavramlardan yararlanarak türevin anlamını ve türev alma kurallarını örneklerle ele alacağız. Her örneğin adım adım tekrar edilmesi, materyalin anlaşılması için önemlidir. Daha sonra türevin iktisattaki bazı kullanım alanlarından örnekler vereceğiz. Türevin kullanımına örnek olarak sırasıyla, marjinal fonksiyonları, esnekliği ve tüketim ve tasarruf konularını ele alacağız.

LİMİT VE SÜREKLİLİK

Limit ve süreklilik kavramları, nispeten soyut kavramlar olmakla birlikte matematiksel analiz için oldukça önemlidir. İktisat alanında en fazla kullanılan matematiksel araçlardan biri olan türevin anlaşılabilmesi için, öncelikle limit ve süreklilik kavramlarını bilmemiz gerekir. Türevi tanımlayabilmemiz için limit kavramını bilmemiz gereklidir. Ayrıca bu bölümde göreceğimiz gibi, bir fonksiyonun türevinin mevcut olabilmesi için gerekli ilk koşul, sürekli olmasıdır. Süreklilik ise ancak limit kavramı yardımıyla belirlenebilecek bir özelliktir.

Limit Kavramı

Limit: Bir fonksiyonun bağımsız değişkeni belli bir değere yaklaşırken fonksiyonun yaklaştığı değerdir.

Limit, *bir fonksiyonun bağımsız değişkeni belli bir değere yaklaşırken, fonksiyonun yaklaştığı değeri gösterir.* $y = f(x)$ gibi bir fonksiyonu ele alalım. Bu fonksiyonda x değişkeni a gibi bir değere yaklaşırken y'nin yaklaştığı değer limit kavramı ile ifade edilir ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Bu ifade ***"x, a'ya giderken (yaklaşırken) fonksiyonun limiti L'dir"*** şeklinde okunur. Bu ve bundan sonraki bölümlerde x gibi bir değişkenin a gibi bir değere yaklaştığını ifade etmek için, zaman zaman "$x \to a$" gösterimini kullanacağız. Limit kavramını düşünürken x'in a'ya yaklaştığını fakat asla a değerini almadığını ve L'nin sonlu bir değeri ifade etttiğini unutmamalıyız. $L = \pm\infty$ ise bu fonksiyonun limiti yoktur.

DİKKAT

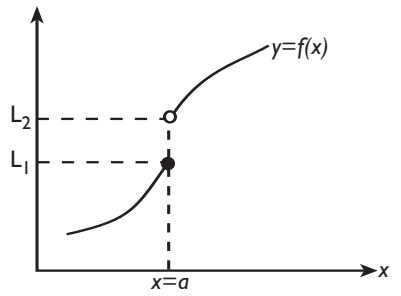
$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ **ise bu fonksiyonun limiti yoktur.**

Eğer bir fonksiyonun sağdan ve soldan limitleri mevcut ve birbirlerine eşit ise bu fonksiyonun limiti vardır.

Burada x değişkeni a değerine, a'dan daha küçük veya daha büyük değerlerden yaklaşabilir. Eğer x a'ya küçük değerlerden yaklaşıyorsa "x a'ya soldan yaklaşıyor" deriz. Benzer şekilde, x a'ya a'dan büyük değerlerden yaklaşıyorsa "x a'ya sağdan yaklaşıyor" deriz. x'in a'ya sağdan veya soldan yaklaşmasına göre **sağdan limit** ve **soldan limit** kavramları tanımlanmaktadır.

Şekil 1.1

Sağdan ve soldan limitler



Sağdan Limit

Bir $f(x)$ fonksiyonunun, x a'ya yaklaşırken sağdan limiti x a'ya, a'dan daha büyük değerlerden yaklaşırken fonksiyonun yaklaştığı değerdir ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Soldan Limit

Bir $f(x)$ fonksiyonunun, x a'ya yaklaşırken soldan limiti x a'ya, a'dan küçük değerlerden yaklaşırken fonksiyonun yaklaştığı değerdir ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Sağdan ve soldan limitleri ifade ederken a'nın üzerindeki işaretlere dikkat ediniz. "+" işareti sağdan limiti gösterirken, "–" işareti soldan limiti göstermektedir.

Bir fonksiyonun a noktasında sağdan ve soldan limitleri mevcut olsa bile, bu limitler birbirlerine eşit değilse bu fonksiyonun a noktasında limiti yoktur.

Eğer bir fonksiyonun sağdan ve soldan limitleri mevcut ve birbirlerine eşit ise bu fonksiyonun limiti vardır. Bu durumda sağdan ve soldan limitler şeklinde ifade etmeye gerek yoktur ve "+"/"–" işaretlerini kullanmadan sadece fonksiyonun limitinden bahsedebiliriz. *Bir fonksiyonun bir a noktasında sağdan ve soldan limitleri mevcut olsa bile, bu limitler birbirlerine eşit değilse bu fonksiyonun a noktasında limiti yoktur.* Böyle bir fonksiyon Şekil 1.1'de gösterilmiştir. Şekilde x, a'ya soldan yakla-

şırken fonksiyon L_1'e yaklaşmaktadır. x, a'ya sağdan yaklaşırken fonksiyon L_2'ye yaklaşmaktadır. Görüldüğü gibi sağdan ve soldan limitler birbirlerinden farklıdır:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1 \neq \lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

Bir Fonksiyonun Limitinin Bulunması

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun x a'ya yaklaşırken limitini bulmak için x'e, soldan ve sağdan a'ya yaklaşan değerler vererek y'nin hangi değere yaklaştığına bakmamız gerekir. Örneğin $y = x^2$ fonsiyonunun, x 2'ye yaklaşırken limitini bulmaya çalışalım. Önce x 2'ye soldan yaklaşırken fonksiyonun hangi değere yaklaştığında bakalım. x'e, 2'ye soldan yaklaşan değerler verdiğimizde fonksiyonun değerinin 4'e yaklaştığını görmekteyiz. Bu durum Tablo 1.1'in ilk iki sütununda görülmektedir. Aynı şekilde x'e 2'ye sağdan yaklaşan değerler verdiğimizde, fonksiyonun değerinin yine 4'e yaklaştığını görmekteyiz. Bu durum ise tablonun son iki sütununda görülmektedir. Her iki limit de aynı olduğu için bu fonksiyonun limitini aşağıdaki gibi yazarız:

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = \lim_{x \to 2^+} x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

x	$y = x^2$	x	$y = x^2$
1	1	3	9
1,5	2,25	2,5	6,25
1,8	3,24	2,2	4,84
1,9	3,61	2,1	4,41
1,99	3,9601	2,01	4,0401
1,999	3,996001	2,001	4,004001
$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$		$\lim_{x \to 2^+} x^2 = 4$	

Tablo 1.1
Sağdan ve Soldan Limit

Limitin Özellikleri

Herhangi bir fonksiyonun limitini bulurken limit ile ilgili aşağıdaki özellikler işimizi kolaylaştıracaktır:

L1: $\lim_{x \to a} c = c$

Örnek: $\lim_{x \to 2} 5 = 5$

L2: $\lim_{x \to a} x = a$

Örnek: $\lim_{x \to 0} x = 0$

L3: $$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

Örnek: $$\lim_{x\to 2}\left[x^2+3x\right]=\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}3x=4+6=10$$

L4: $$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

Örnek: $$\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2}{2}\cdot 3x\right]=\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{2}\cdot\lim_{x\to 2}3x=\frac{4}{2}\cdot 6=12$$

L5: $$\lim_{x\to a}c\cdot f(x)=c\cdot\lim_{x\to a}f(x)$$

Örnek: $$\lim_{x\to 2}5\cdot\frac{x^2}{2}=5\cdot\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{2}=5\cdot 2=10$$

L6: $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}\qquad \lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

Örnek: $$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2}{1+x}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}2x^2}{\lim\limits_{x\to 2}\left(1+x\right)}=\frac{8}{3}$$

L7: $$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^n$$

Örnek: $$\lim_{x\to 2}\left[x^2\right]^2=\left[\lim_{x\to 2}x^2\right]^2=4^2=16$$

L8: $$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}$$

Örnek: $$\lim_{x\to 3}\sqrt{3x}=\sqrt{\lim_{x\to 3}3x}=\sqrt{9}=3$$

L9: $$\lim_{x\to a}\left[c^{f(x)}\right]=c^{\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right]}$$

Örnek: $$\lim_{x\to 3}\left[2^{\sqrt{3x}}\right]=2^{\left[\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{3x}\right]}=2^3=8$$

Yukarıdaki özelliklerin kullanımına bir örnek olması amacıyla, aşağıdaki fonksiyonun x 1'e yaklaşırken limitini bulmaya çalışalım:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2+2x-1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2+2x-1}{x}}=\sqrt{\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}\right)} \quad \text{(Kural L8)}$$

$$=\sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 1} x^2+2\lim\limits_{x\to 1} x-1}{\lim\limits_{x\to 1} x}} \quad \text{(Kural L3, L4 ve L6)}$$

$$=\sqrt{\frac{1+2-1}{1}}=\sqrt{2}$$

Süreklilik

Bir fonksiyonun limiti mevcut ise ve bu limit fonksiyonun değerine eşit ise o fonksiyon **"sürekli"** bir fonksiyondur. Süreklilik özelliği aşağıdaki gibi tanımlanır:

Bir $f(x)$ fonksiyonu

1. a noktasında tanımlı ise, yani $f(a)$ mevcut ise
2. a noktasında limiti var ise:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

3. ve bu limit, fonksiyonun s noktasındaki değerine eşit ise

$$\lim_{x\to a} f(x)=L=f(a)$$

$f(x)$ fonksiyonu a noktasında süreklidir.

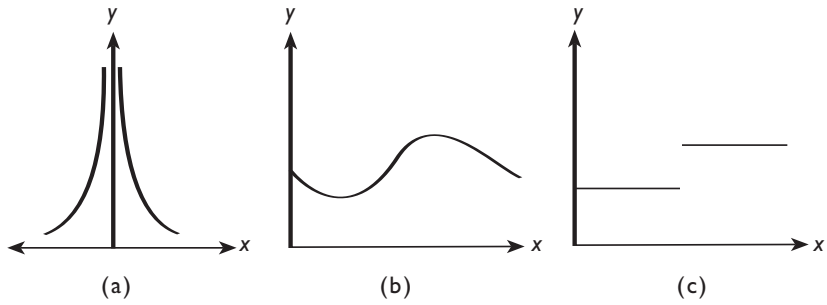
Aşağıdaki fonksiyonu ele alalım:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$

Bu fonksiyon sürekli değildir. Çünkü fonksiyon $x = 0$ noktasında tanımlı değildir. Dolayısıyla sürekliliğin birinci koşulunu sağlamamaktadır. Bu fonksiyonun grafiği Şekil 1.2'deki (a) panelinde görülmektedir. Sürekli fonksiyonların grafikleri de sürekli olur. Eğer bir fonksiyonun grafiğini çizdiğimizde, kesintiler veya sıçramalar görüyorsak bu fonksiyon sürekli değildir. Şekil 1.2'de (b) panelindeki fonksiyon sürekli bir fonksiyondur. Buna karşılık Şekil 1.1'deki ve Şekil 1.2'de (a) ve (c) panellerindeki fonksiyonlar ise sürekli değildir.

Şekil 1.2

Sürekli (b) ve Süreksiz (a,c) Fonksiyonlar



TÜREV

İktisatçıların araştırdıkları soruların çoğu, ilişkili iki değişkenden birinin değeri artarken diğerinin değerinin hangi yönde ve ne kadar değişeceği ile ilgilidir. Bu sorulardan bir kaçını örnek olması amacıyla sıralayabiliriz:

- Acaba bir yıl daha fazla okula gitmenin bireylerin ortalama ücretlerine etkisi ne kadardır?
- Bir malın fiyatındaki 1 liralık artış, mala olan talebi ne kadar azaltacaktır?
- Döviz kurlarındaki 1 kuruşluk artış, net ihracatı ne yönde ve hangi miktarda değiştirecektir?
- Üretim miktarındaki bir birimlik artış, toplam maliyetleri ne kadar artıracaktır?
- Vergi oranındaki %1'lik bir artış, vergi hasılasını artıracak mıdır, yoksa azaltacak mıdır?

İktisat gibi diğer bütün bilim dalları, benzer sorularla doludur. Bütün bu sorulara matematikteki türev kavramı yardımıyla cevap bulunabilir.

Türev, birbirleriyle ilişkili iki değişkenden biri artarken diğer değişkenin nasıl değişeceğini gösterir.

Türev, birbirleriyle ilişkili iki değişkenden biri artarken diğer değişkenin nasıl değişeceğini gösterir. Bir $y = f(x)$ fonksiyonunu ele alırsak bu fonksiyonun herhangi bir x_0 noktasındaki türevi, x değişkeninin x_0 noktasından çok küçük bir değişimin y'yi nasıl değiştireceğini gösterir. Türevi anlayabilmek için öncelikle değişim oranı kavramından hareket etmek gerekir.

Değişimi Oranı ve Türev

Değişim oranı, fonksiyonun değerindeki değişimin bağımsız değişkendeki değişime oranıdır.

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun **değişim oranı** veya **eğimi,** y değişkenindeki değişimin x değişkenindeki değişime oranı olarak ifade edilir:

$$\text{Değişim oranı} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

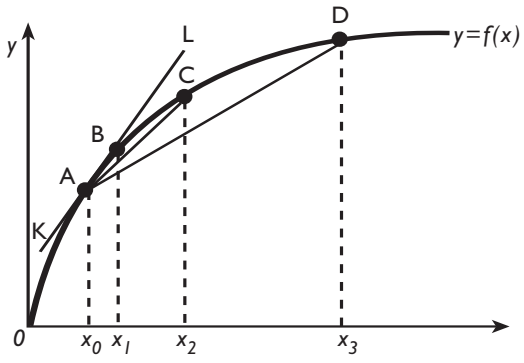
Eğer $f(x)$ doğrusal bir fonksiyon ise değişim oranı Δx'in bütün değerlerinde aynıdır. Doğrusal olmayan bir fonksiyonda ise değişim oranı farklı değerler alacaktır. Bunu Şekil 1.3'te görebiliriz. Şekilde x'in değeri x_0'dan x_3'e değiştiğinde, değişim oranı AD doğrusunun eğimine eşittir: $f(x_3) - f(x_0) \,/\, x_3 - x_0$. Aynı şekilde x, x_0'dan x_2'ye değiştiğinde, değişim oranı AC doğrusunun eğimine eşit olacaktır. Şekilde açıkça görüldüğü gibi, her iki doğrunun eğimi birbirlerinden farklıdır. x'deki değişim miktarı azaldıkça, yani Δx küçüldükçe, değişim oranı da KL doğrusunun eğimine yaklaşacaktır.

KL doğrusu fonksiyona, $x = x_0$ noktasında "teğet"tir. Bu doğrunun eğimi $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevini verir ve x'in x_0 başlangıç noktasından *sıfıra yakın bir miktarda* değiştiğinde, y'nin nasıl değişeceğini gösterir. Türev matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Şekil 1.3

Doğrusal olmayan bir fonksiyonun değişim oranı



Bu ifadeden hareketle $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi, "*Δx sıfıra yaklaşırken fonksiyonun değişim oranı*" olarak da tanımlanabilir. Türevi ifade etmek için çeşitli gösterimler kullanılmaktadır. Aşağıdakilerin hepsi türevi ifade etmektedir:

$$\frac{dy}{dx} \equiv \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] \equiv f'(x)$$

Bu bölümde, yukarıdaki her üç gösterim şekliyle de karşılaşacaksınız. Bu gösterimlere aşinalık kazanmanız, ilgili materyali anlayabilmeniz açısından önemlidir.

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevi, bu noktadan geçen teğetin eğimine eşittir.

Türevin tanımından hareketle, $y = 3x + 2x^2$ foksiyonunun türevini bulalım. Bunun için x'in herhangi bir x_0 değerinden x_1 değerine değiştiğini düşünerek fonksiyonun değişim oranını yazalım:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\left[3(x_0 + \Delta x) + 2(x_0 + \Delta x)^2\right] - \left[3(x_0) + 2(x_0)^2\right]}{\Delta x}$$

Yukarıdaki ifadede, fonksiyonda sırasıyla x_0 ve $x_0 + \Delta x$ değerlerini yerine koyduk. Burada $x_0 + \Delta x$ değerinin, x'in değişimden sonraki değerine, yani x_1'e eşit olduğuna dikkat ediniz. Değişim oranının payında yer alan ifadeyi genişletip düzenleyelim:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\left[3(x_0 + \Delta x) + 2\left(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2\right)\right] - \left[3(x_0) + 2(x_0)^2\right]}{\Delta x} \\ &= \frac{\cancel{3(x_0)} + 3\Delta x + \cancel{2x_0^2} + 4x_0\Delta x + 2\Delta x^2 - \cancel{3(x_0)} - \cancel{2x_0^2}}{\Delta x} \\ &= \frac{3\Delta x + 4x_0\Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x}\end{aligned}$$

En son ifadedeki bölüm işlemini yaparsak değişim oranını aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3 + 4x_0 + 2\Delta x$$

Bu değişim oranının $\Delta x \to 0$ için limitini alırsak, fonksiyonun x_0 noktasındaki türevini elde ederiz:

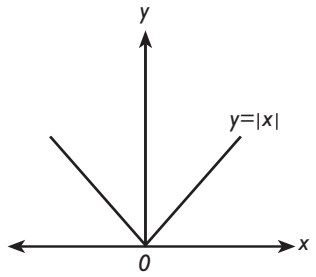
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(3 + 4x_0 + 2\Delta x\right) = 3 + 4x_0$$

Bir fonksiyonun türevi, yine bir fonksiyondur.

Bulduğumuz bu türev değeri, x_0 noktasındaki teğetin eğimine eşittir ve başlangıç değerine bağlı olarak değişecektir. Bunun nedeni fonksiyonun doğrusal olmamasıdır. Diğer bir ifade ile, doğrusal olmayan bir fonksiyonun türevi bir sabit değil, yine bir fonksiyon olacaktır. Dolayısıyla türev "türetilmiş bir fonksiyondur."

Şekil 1.4

Sürekli fakat türevi alınamayan bir fonksiyon



Türevi Alınabilir Fonksiyonlar

Her foksiyonun türevi alınabilir mi? Bu sonun cevabı "hayır" olacaktır. Bir fonksiyonun türevinin alınabilmesi için, iki koşulu sağlaması gerekir: (1) *sürekli olması,* (2) *keskin köşelere sahip olmaması*. Fonksiyonların sürekliliğini limit konusunda ele almıştık. Köşeli fonksiyonlara bir örnek olarak, $y = |x|$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun grafiği Şekil 1.4'te görülmektedir.

Şekil 1.4'deki fonksiyon sürekli olmasına rağmen, $x = 0$ noktasında bir köşeye sahiptir. Bu nedenle fonksiyonun bu noktada türevi alınamaz. Bunu görmek için değişim oranının, x sıfıra yaklaşırken soldan ve sağdan limitlerini alalım:

Bir fonksiyonun türevinin alınabilmesi için, sürekli olması ve keskin köşelere sahip olmaması gerekir.

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} -1 = -1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} 1 = 1$$

Görüldüğü gibi soldan ve sağdan limitler birbirine eşit değildir. Dolayısıyla, sürekli olmasına rağmen, bu fonksiyonun türevi alınamaz.

Türevin Anlamı

Bir fonksiyonun türevi, bize fonksiyon hakkında ne gibi bilgiler verir? Bu soruya bir cevap aramadan önce, fonksiyonun belli bir noktadaki türevinin nasıl bulunacağını görelim.

Bir fonksiyonun türevinin x_0 gibi belli bir noktadaki değerini, x_0 değerini türev ifadesinde yerine koyarak bulabiliriz. Bunun için aşağıdaki gösterimlerden *herhangi birini* kullanırız:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \quad \text{veya} \quad f'(x_0)$$

Örneğin $y = 3 + 2x^2$ foksiyonunun türevinin $x_0 = 2$ noktasındaki değeri,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = 3 + 4(2) = 11 \quad \text{veya} \quad f'(2) = 3 + 4(2) = 11$$

olarak bulunur. *Bulduğumuz 11 değeri, $x = 2$ noktasında fonksiyona teğet olan doğrunun eğimidir.*

Bir fonksiyonun herhangi bir noktadaki türevi, fonksiyonun o noktada artan mı, yoksa azalan mı olduğunu gösterir. Fonksiyonun bir noktadaki türevi pozitif ise, fonksiyon o noktada artandır. Yani x arttığında fonksiyonun değeri de artmaktadadır. Fonksiyonun bir noktadaki türevi negatif ise fonksiyon bu noktada azalandır. Yani x arttığında fonksiyonun değeri azalmaktadır. Bir fonksiyonun türevi tanımlı olduğu aralıkta sürekli pozitif ise bu fonksiyona **artan fonksiyon** adı verilir. Bir fonksiyonun türevi tanımlı olduğu aralıkta sürekli azalan ise bu fonksiyona **azalan fonksiyon** adı verilir. Artan veya azalan fonksiyonlar, genel olarak **monoton fonksiyon** olarak adlandırılır.

Bir fonksiyonun herhangi bir noktadaki türevi pozitif ise fonksiyon o noktada **artan**dır. Bir fonksiyonun herhangi bir noktadaki türevi negatif ise fonksiyon bu noktada **azalan**dır.

Artan veya azalan fonksiyonlar, **monoton fonksiyon** olarak adlandırılır.

Bütün fonksiyonlar monoton fonksiyon değildir. Birçok doğrusal olmayan fonksiyon, tanımlı olduğu aralıktaki bazı yerlerde artan bir fonksiyon iken, bazı yerlerde azalan bir fonksiyondur. Yukarıda açıklandığı gibi, fonksiyonun nerede artan, nerede azalan bir fonksiyon olduğunu fonksiyonun o noktadaki türevinin işaretine bakarak anlayabiliriz. *Fonksiyonun artarken azalmaya döndüğü veya azalırken artmaya döndüğü noktalarda, fonksiyonun türevi sıfırdır*. Bu noktalarda fonksiyona teğet olan doğrunun eğimi sıfırdır, yani yatay eksene paraleldir.

Bir fonksiyonun, artarken azalmaya döndüğü veya azalırken artmaya döndüğü noktalarda, fonksiyonun türevi sıfırdır.

TÜREV ALMA KURALLARI

Fonksiyonların türevlerini alırken her zaman değişim oranının limitini almakla uğraşmamıza gerek yoktur. Bunun yerine kısa yoldan türev almak için geliştirilmiş kuralları uygularız. Aşağıda $y = f(x)$ şeklindeki bir fonksiyonun türevini alırken kullanılacak kurallar verilmiştir.

Sabit Fonksiyon Kuralı

k bir sabit ise, $y = k$ gibi bir sabit fonksiyonun türevi sıfırdır: $f'(x) = 0$. Örneğin $y = 3/5$ fonksiyonunun türevi $f'(x) = 0$ olacaktır. Bununla birlikte $g(x) = k \cdot f(x)$ gibi bir fonksiyonun türevi ise $g(x) = k \cdot f'(x)$ olarak elde edilir.

Kuvvet Fonksiyonu Kuralı

$y = x^k$ gibi bir fonksiyonun türevini almak için, fonksiyon x'in kuvveti olan n ile çarpılır ve x'in kuvvetinden bir çıkarılır: $f'(x) = kx^{k-1}$. Bunu birkaç örnek yardımı ile görelim:

$$y = x^3, \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$y = x^{3/4}, \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$$

Kuvvet fonksiyonu kuralı, c ve k gibi iki sabit için, $y = cx^k$ gibi daha genel bir fonksiyonun türevinin alınmasında da kullanılabilir. Böyle bir fonksiyonun türevi $f'(x) = ckx^{k-1}$ olacaktır. Bu kuralı kullanarak aşağıdaki türevleri elde edelim:

$$y = \frac{3}{4}x^2, \qquad \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{4}x^2\right) = \frac{3}{4}2x = \frac{3}{2}x$$

$$y = 5\sqrt{x} = 5x^{1/2}, \qquad \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(5x^{1/2}\right) = \frac{5}{2}x^{-1/2} = \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

Toplam Kuralı

$f(x)$ ve $g(x)$ gibi, türevi alınabilir iki fonksiyonun toplamlarının türevi, fonksiyonların ayrı ayrı türevlerinin toplamına eşittir:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]\pm\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]=f'(x)\pm g'(x)$$

Bu kuralı kullanarak, $y=4x^3+\sqrt{x}$ gibi bir fonksiyonun türevi,

$$\frac{d}{dx}\left[4x^3+\sqrt{x}\right]=\frac{d}{dx}\left(4x^3\right)+\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=12x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde, $y = 2x^5 - 4x^{-3} + 3x - 15$ öfonksiyonunun türevi ise aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[2x^5-4x^{-3}+3x-15\right]&=\frac{d}{dx}\left(2x^5\right)-\frac{d}{dx}\left(4x^{-3}\right)+\frac{d}{dx}\left(3x\right)-\frac{d}{dx}\left(15\right)\\&=10x^4+12x^{-4}+3\end{aligned}$$

Çarpım Kuralı

İki fonksiyonun çarpımı olarak yazılabilen bir fonksiyonun türevini alırken aşağıdaki kural kullanılır:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]=g(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]+f(x)\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]=g(x)f'(x)+f(x)g'(x)$$

Burada, $f(x)$ ve $g(x)$'in her ikisinin de x'in birer fonksiyonu olduklarına dikkat ediniz. Bu kuralı kullanarak $y = (2x + 3x^2)\ x^3$ gibi bir fonksiyonun türevini aşağıdaki gibi alırız:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\left(2x+3x^2\right)x^3\right]&=x^3\frac{d}{dx}\left(2x+3x^2\right)+\left(2x+3x^2\right)\frac{d}{dx}\left(x^3\right)\\&=x^3\left(2+6x\right)+\left(2x+3x^2\right)3x^2\\&=2x^3+6x^4+6x^3+9x^4\\&=8x^3+15x^4\end{aligned}$$

Bölüm Kuralı

$f(x)$ ve $g(x)$ gibi iki fonksiyonun bölümünün türevini almak için, aşağıdaki kural uygulanır:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]-f(x)\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]}{\left[g(x)\right]^2}=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Örneğin,

$$y = \frac{2x+3}{1+x^2}$$

fonksiyonunun türevi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+3}{1+x^2}\right) = \frac{\left(1+x^2\right)\frac{d}{dx}\left(2x+3\right) - \left(2x+3\right)\frac{d}{dx}\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(1+x^2\right)2 - \left(2x+3\right)2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2-6x}{1+2x^2+x^4}$$

$$= \frac{2-2x^2-6x}{1+2x^2+x^4}$$

Zincir Kuralı

$f(g(x))$ gibi bir bileşke fonksiyonun türevi $f'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$ olarak elde edilir. **Zincir kuralı** adı verilen bu yöntemde, önce dış fonksiyonun türevi alınır ve iç fonksiyonun türevi ile çarpılır. Zincir kuralını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$y = f(z),\ z = g(x) \Rightarrow y = f(g(x)),$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} \quad \text{veya } f'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

Örnek olarak, $y = 2(3x + 2)^3$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon $f(g(x)) = 2(g(x))^3$ ve $g(x) = 3x^2 + 2x$ şeklinde yazılabilir. Bu fonksiyonun türevi zincir kuralı yardımı ile,

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(g(x))\, g'(x) \\ &= 6(3x^2 + 2x)^2\, 6x + 2 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Zincir kuralını uygularken en önemli nokta herhangi bir fonksiyonu bileşke fonksiyon olarak yazabilmektir. Örneğin, $y = 3\sqrt{2+4x^3-2x^2}$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonu $y = f(z) = 3\sqrt{(z)}$, $z = g(x) = 2 + 4x^3 - 2x^2$ şeklinde iki fonksiyon hâlinde yazabilir ve zincir kuralını uygulayabiliriz:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \left(\frac{d}{dz}3\sqrt{z}\right)\left(\frac{d}{dx}\left(2+4x^3-2x^2\right)\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2}z^{-1/2}\right)\left(12x^2-4x\right) = \frac{3}{2}\left(2+4x^3-2x^2\right)^{-1/2}\left(12x^2-4x\right)$$

Üstel Fonksiyon Kuralı

$y = e^{nx}$ şeklindeki bir üstel fonksiyonun türevini alırken aşağıdaki kural uygulanır.

$$\frac{d}{dx}\left(e^{nx}\right) = ne^{nx}$$

Örneğin, $y = e^{3x}$ fonksiyonunun türevi, $f'(x) = 3e^{3x}$ olarak bulunur. Üstel fonksiyon kuralını, zincir kuralı yardımıyla genelleştirebiliriz. Bir $g(x)$ fonksiyonu için, $f(x) = e^{g(x)}$ fonksiyonun türevi,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{g(x)}\right) = g'(x)e^{g(x)}$$

şeklinde elde edilir. Örneğin $f(x) = e^{5x^2-2x}$ fonksiyonunun türevi $f'(x) = (10x - 2)e^{5x^2-2x}$ folarak bulur. $f(x) = k^x$ gibi bir fonksiyonun türevi ise $f'(x) = k^x \cdot \ln k$ olarak yazılır.

SIRA SİZDE 1

$y = 3^{2x^2}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Logaritmik Fonksiyon Kuralı

$y = \ln x$ gibi logaritmik bir fonksiyonunun türevi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln x\right) = \frac{1}{x}$$

$f(x)$ $\ln g(x)$ gibi bir fonksiyonun türevi, logaritmik fonksiyon kuralı ve zincir kuralı uygulanarak bulunabilir:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln g(x)\right) = \frac{1}{g(x)}g'(x)$$

Örneğin $f(x) = \ln(3x^2 + 2x)$ fonksiyonunun türevi,

$$f'(x) = \frac{1}{3x^2 + 2x}(6x + 2)$$

olarak bulur.

Logaritmik fonksiyon kuralı sıklıkla, bir değişkenin büyüme oranını bulmak için kullanılır. Bir $y = f(x)$ fonskiyonunun **"anlık büyüme oranı"** aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$g_y = \frac{dy/dx}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Bu ifadenin logaritmik fonksiyonun türevine karşılık geldiğine dikkat ediniz. Büyüme oranı zaman ile ilgili bir kavram olduğu için, genellikle bağımsız değişken olarak x yerine, zamanı ifade eden t kullanılır. Yukarıdaki büyüme oranı ifadesinin logaritmik fonksiyonun türevine karşılık geldiğine dikkat ediniz. Fonksiyonu $y = f(t)$ olarak yazarsak y'nin anlık büyüme oranı aşağıdaki gibi yazılır:

$$g_y = \frac{d}{dt}\left[\ln f(t)\right] = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

Büyüme oranını nüfus örneğini kullanarak açıklayalım. Ülke nüfusunu *"N"* ile gösterirsek nüfusun zaman içerisindeki artışını aşağıdaki gibi bir fonksiyon ile gösterebiliriz:

$N = N_0 e^{rt}$

Bu fonksiyonda $N_0 > 0$ ve $r > 0$ birer sabit, t ise zaman değişkenini göstermektedir. Nüfus artış oranını bulmak için, yukarıdaki büyüme oranı formülündeki her iki ifadeyi de kullanabiliriz. Önce normal türevi kullanarak bulalım. Buna göre nüfus artış oranı $g_N = N'/N$ olacaktır:

$$N' = N_0 r e^{rt}$$

$$g_N = \frac{N'}{N} = \frac{\cancel{N_0}\, r\, \cancel{e^{rt}}}{\cancel{N_0}\, \cancel{e^{rt}}} = r$$

Şimdi de nüfus artış oranını logaritmik formül yardımıyla bulalım. Bunun için öncelikle fonksiyonun logaritması alalım. Daha sonra ise logaritmik fonksiyonun türevini alalım:

$$\ln N = \ln\left(N_0 e^{rt}\right)$$

$$g_N = \frac{d}{dt}\left[\ln\left(N_0 e^{rt}\right)\right] = \frac{1}{\cancel{N_0}\, \cancel{e^{rt}}}\, \cancel{N_0}\, r\, \cancel{e^{rt}} = r$$

Görüldüğü gibi, her iki yöntemle bulduğumuz nüfus artış oranı aynıdır ve r'ye eşittir. Sayısal bir örnek olarak, $y = 12e^{0,02t}$ fonksiyonunu ele alalım ve y değişkeninin büyüme oranını bulalım:

$$\ln y = \ln\left(12e^{0,02t}\right)$$

$$g_y = \frac{d}{dt}\ln y = \frac{1}{12e^{0,02t}}\, 12(0,02)e^{0,02t} = 0,02$$

Bir ülkenin gayrisafi yurtiçi hasılasını $Y(t)$ ile, nüfusunu da $N(t)$ ile gösterelim. Her ikisi de zamanın bir fonksiyonu olsun. Kişi başına gayrisafi yurtiçi hasıla, toplam gayrisafi yurtiçi hasılanın ülke nüfusuna bölünmesiyle elde edilir:

$$y(t) = \frac{Y(t)}{N(t)}$$

Kişi başına gayrisafi yurtiçi hasılanın büyüme oranını bulmak için, önce $y(t)$'nin logaritmasını alır, daha sonra da türevini alırız:

$$\ln y(t) = \ln\left(\frac{Y(t)}{N(t)}\right) = \ln Y(t) - \ln N(t)$$

$$g_y = \frac{d}{dt}\left[\ln y(t)\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\ln Y(t)\right] - \frac{d}{dt}\left[\ln N(t)\right] = \frac{Y'(t)}{Y(t)} - \frac{N'(t)}{N(t)}$$

$Y(t)$'nin büyüme oranını g_Y ile, $N(t)$'nin büyüme oranını ise g_N ile gösterirsek kişi başına gayrisafi yurtiçi hasılanın büyüme oranı, $g_Y = g_Y - g_N$ olarak bulunacaktır. Örneğin gayrisafi yurtiçi hasıla yıllık %4, nüfus ise yıllık %0,05 oranında büyüyorsa, kişi başına gayrisafi yurtiçi hasıla $g_Y = 0{,}04 - 0{,}005 = 0{,}035$, yani yıllık %3,5 oranında büyüyecektir.

Trigonometrik Fonksiyon Kuralı

Temel trigonometrik fonksiyonların türevleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \text{ ve } \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

Kapalı Foksiyon Kuralı

Buraya kadar yaptığımız türev alma işlemlerinde hep, $y = f(x)$ şeklindeki fonksiyonların türevlerini bulduk. İktisatta birçok ilişki kapalı fonksiyonlar şeklinde ifade edilir. Örneğin, farksızlık eğrileri ve eş ürün eğrileri bunlardan bazılarıdır. Herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonunu, $F(y, x) \equiv y - f(x) = 0$ şeklinde bir kapalı fonksiyon olarak yazabiliriz. Böyle bir kapalı fonksiyonun türevini nasıl alırız? Bunun bir yolu, fonksiyonu tekrar normal formunda, $y = f(x)$ şeklinde ifade etmektir. Örneğin, $F(x, y) = y - 4x^3 + 5x^2 - 4x = 0$ fonksiyonunu y değişkeni için çözüp $y = 4x^3 - 5x^2 + 4x$ şeklinde yazabilir, daha sonra da türevini alabiliriz. Fakat bu her zaman mümkün olmayabilir. Örnek olarak aşağıdaki fonksiyonu ele alalım:

$$F(y, x) \equiv y^2 + x^2\, xy = 0$$

Bu fonksiyonu y cinsinde çözerek $y = f(x)$ formunda ifade etmemiz mümkün değildir. Buna rağmen, böyle bir fonksiyon için dy/dx türevini bulabiliriz. Bunun için kapalı fonksiyon kuralını uygulamamız gerekir:

$F(y, x) = 0$ ise,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left.\dfrac{dF(y,x)}{dx}\right|_{y \text{ sabit}}}{\left.\dfrac{dF(y,x)}{dy}\right|_{x \text{ sabit}}} = -\frac{F_x}{F_y}, \qquad F_y \neq 0$$

Yukarıdaki kuralda $dF(y, x)/dx$ veya F_x ile gösterilen türevi alırken, *y değişkenini bir sabit gibi düşünmemiz gerekmektedir.* Aynı şekilde, $dF(y, x)/dy$ veya F_y ile gösterilen türevi alırken de *x değişkenini sabit bir sayı gibi düşünmeliyiz.*

Kapalı foknsiyon kuralını uygulayarak yukarıda ele aldığımız kapalı fonsiyonun türevini alalım:

$F(y, x) \equiv y^2 + x^2\ xy = 0$

$$\left.\frac{dF(y,x)}{dx}\right|_{y\ \text{sabit}} = F_x = 2x + y, \qquad \left.\frac{dF(y,x)}{dy}\right|_{x\ \text{sabit}} = F_y = 2y + x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x+y}{2y+x}$$

İKİNCİ VE DAHA YÜKSEK DERECEDEN TÜREVLER

Daha önce, bir fonksiyonun türevinin de yine bir fonksiyon olduğuna dikkat çekmiştik. Bu gerçek, bir fonksiyonun türevinin de türevinin alınabileceği anlamına gelir. Yani, türevini aldığımız bir fonksiyonun, tekrar türevini alabiliriz. Bunun için tek koşul, ilk türevin sabit bir sayı olmamasıdır. Örneğin, doğrusal bir fonksiyonun türevi sabit bir sayı olacağı için, ikinci türevi yoktur. Buna karşılık, iki ve daha yüksek dereceden polinomların ikinci türevleri vardır.

İkinci kez türev alınarak elde edilen bu fonksiyona **"ikinci dereceden türev",** veya kısaca **"ikinci türev"** adı verilir. Aslında, ikinci türev de bir fonksiyon olduğuna göre, onun da türevi alınabilir. Dolayısıyla, mevcut olması koşuluyla bir fonksiyonun ikinci, üçüncü, dördüncü ve daha yüksek derecelerden türevlerinden bahsedebiliriz. En sık kullanılan türevler, birinci ve ikinci türevlerdir. Bunun yanında, bazı durumlarda daha yüksek derecelerden türevlere de ihtiyacımız olabilir.

$y = f(x)$ gibi bir fonksiyonun ikinci türevi, bu fonksiyonun türevinin türevidir ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\frac{d\left(f'(x)\right)}{dx} \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \equiv \frac{d^2y}{dx^2} \equiv f''(x) \equiv f^{(2)}(x)$$

Yukarıdaki gösterimlerin hepsi ikinci türevi ifade etmektedir. Örneğin, $y = x^2$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevleri aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

İkinci türev bir fonksiyonun eğiminin azaldığı, arttığı veya sabit kaldığı hakkında bilgi verir. İkinci türev pozitif ise eğim artmakta, negatif ise eğim azalmakta, sıfır ise eğim sabit kalmaktadır.

Daha önce türevin bir fonksiyonun artan veya azalan bir fonksiyon olup olmadığını gösterdiğini öğrenmiştik. Yukarıdaki fonksiyonun birinci türevi, x'in pozitif değerleri için pozitif, negatif değerleri için negatifdir. Bu da bize bu fonksiyonun, x'in negatif olduğu bölgede azalan bir fonksiyon olduğunu, x'in pozitif olduğu bölgede ise artan bir fonksiyon olduğunu göstermektedir. İkinci türev ise bize fonksiyonun birinci türevinin artan veya azalan bir fonksiyon olup olmadığı hakkında bilgi verir. Fonksiyonun birinci türevi o fonksiyonun eğimi olduğuna göre, ikinci türev fonksiyonun eğiminin nasıl hareket ettiği hakkında bilgi verir. Yukarıdaki fonksiyonun ikinci türevi sabit ve pozitiftir. Buradan fonksiyonun eğiminin sürekli arttığı sonucunu çıkarmaktayız.

SIRA SİZDE 2

$y = x^2$ fonksiyonunun grafiğini çizerek, $x < 0$ için fonksiyonun azaldığını, $x > 0$ için fonksiyonun arttığını, fonksiyonun eğiminin ise sürekli arttığını gösteriniz.

İkinci türevi daima pozitif olan fonksiyonlar, **dışbükey fonksiyon** olarak adlandırılır.

Eğimi sürekli artan, yani ikinci türevi daima pozitif olan fonksiyonlar **dışbükey fonksiyon** olarak adlandırılır. Bu fonksiyonların yerel minimum noktaları mevcuttur. Örneğin, $y = x^2$ fonksiyonu dışbükey bir fonksiyondur. Bu fonksiyon $x = 0$ noktasında en küçük değerine ulaşır.

İkinci türevi daima negatif olan fonksiyonlar, **içbükey fonksiyon** olarak adlandırılır.

Eğimi sürekli azalan, yani ikinci türevi daima negatif olan fonksiyonlar ise **içbükey fonksiyon** olarak adlandırılır. Bu fonksiyonları yerel maksimum noktaları mevcuttur. Örneğin, $y = 5x - x^2$ fonksiyonu içbükey bir fonksiyondur. Çünkü ikinci türevi daima negatiftir: $f''(x) = -2$.

Yukarıda ele aldığımız $y = x^2$ fonksiyonunun 3. türevi sıfırdır. Yani fonksiyonun en fazla iki türevi alınabilmektedir. Bazı fonksiyonların ikiden daha fazla türevini almamız mümkündür. Bir fonksiyonun 3. türevi, 2. türevinin türevidir. Fonksiyonun 4. türevi ise, 3. türevin türevidir. Üçüncü dereceden türevleri gösterirken aşağıdaki gösterimleri kullanırız:

$$\frac{d^3y}{dx^3} \equiv f'''(x) \equiv f^{(3)}(x)$$

4. ve daha yüksek dereceden fonksiyonları gösterirken ise genellikle aşağıdaki gösterimler tercih edilir:

$$\frac{d^ny}{dx^n} \equiv f^{(n)}(x)$$

Örneğin $y = 10\sqrt{x}$ fonksiyonunun yüksek dereceden türevleri mevcuttur:

$$\begin{aligned}
y &= 10\sqrt{x} = 10x^{1/2} \\
f'(x) &= 5x^{-1/2} \\
f''(x) &= -\frac{5}{2}x^{-3/2} \\
f'''(x) &= \frac{15}{4}x^{-5/2} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{75}{8}x^{-7/2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Bir fonksiyonun türevi alınarak elde edilen fonksiyon, **"marjinal fonksiyon"** olarak adlandırılır. Marjinal fonksiyon, bir fonksiyonun bağımsız değişkenindeki çok küçük bir değişimin fonksyonun değerini nasıl değiştirdiğini gösterir.

MARJİNAL FONKSİYONLAR

Türevin iktisattaki en önemli kullanım alanlarından biri marjinal fonksiyonlardır. Bir fonksiyonun türevi alınarak elde edilen fonksiyon, **"marjinal fonksiyon"** olarak adlandırılır. Marjinal fonksiyon, bir fonksiyonun bağımsız değişkenindeki çok küçük bir değişimin fonksyonun değerini nasıl değiştirdiğini gösterir. Dolayısıyla, matematikteki türev kavramının iktisattaki karşılığıdır. İktisatta sıklıkla kullanılan başlıca marjinal fonksiyonlar arasında marjinal hasıla ve marjinal maliyeti sayabiliriz.

Türevin iktisattaki kullanımına ilişkin yardımcı bir kaynak olarak Alpha C. Chiang ve Kevin Wainwright isimli yazarların, Gazi kitabevi tarafından çeviri olarak basılan "Matematiksel İktisadın Temel Yöntemleri" isimli kitabından yararlanılabilir.

KİTAP

Marjinal Hasıla

Bir malın satışından elde edilen **toplam hasıla** (*TR*), malın fiyatı (*P*) ile satılan mal miktarının (*Q*) çarpımına eşittir:

$$TR = Q$$

Toplam hasıla fonksiyonu **monopol piyasası**nda faaliyet gösteren bir firmaya ait ise firmanın karşı karşıya kaldığı fiyat talep edilen miktara bağlı olacaktır. Fiyatı, talep edilen miktarın bir fonksiyonu olarak gösteren denkleme *talep fonksiyonu* adı verildiğini biliyoruz. Doğrusal bir talep fonksiyonunu $P = a - bQ$ şeklinde yazabiliriz. Bu denklemde $a > 0$ ve $b > 0$ "katsayı" adını verdiğimiz sabit değerlerdir. Bu talep fonksiyonunu toplam hasıla ifadesinde yerine koyarak **monopolcü firma**nın toplam hasıla fonksiyonunu sadece satılan mal miktarının bir fonksiyonu olarak elde edebiliriz:

$$TR = (a - bQ)\,Q$$

$$TR = aQ - bQ^2$$

Örneğin, $P = 100 - 2Q$ şeklinde ifade edilen bir talep fonksiyonu, bize aşağıdaki toplam hasıla fonksiyonunu verecektir:

$$TR = 100Q - 2Q^2$$

Bu ifadeyi kullanarak, herhangi bir Q değeri için toplam hasılayı hesaplayabiliriz.

Monopolcü firma negatif eğimli bir talep fonksiyonu ile karşı karşıyadır. Firmanın sattığı ürün miktarı ile fiyatı arasında ters yönlü bir ilişki vardır.

DİKKAT

İktisat derslerinde **marjinal hasıla** (*MR*), *satış miktardaki ilave bir birim artışın, toplam hasılada meydana getireceği değişiklik olarak* tanımlanmaktadır. Bu tanımı değişim oranı olarak aşağıdaki gibi ifade ederiz:

Marjinal hasıla, toplam hasıla fonksiyonunun türevidir.

$$\frac{\Delta TR}{\Delta Q}$$

Hasıla fonksiyonunun türevi alınabilir, yani sürekli bir fonksiyon olduğunu varsayarsak, marjinal hasılayı miktardaki çok küçük bir artışın, toplam hasılada meydana getireceği değişiklik olarak tanımlayabiliriz. Diğer bir ifadeyle *marjinal hasıla, toplam hasıla fonksiyonunun türevidir:*

$$MR = \frac{dTR}{dQ}$$

Bu tanıma göre, yukarıdaki toplam hasıla fonksiyonunun türevi bize marjinal hasılayı verecektir:

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = 100 - 4Q$$

Görüldüğü gibi, marjinal hasıla fonksiyonu da toplam hasıla fonksiyonu gibi satılan mal miktarınının bir fonksiyonudur. Marjinal hasıla fonksiyonunu kullanarak, herhangi bir Q değeri için marjinal hasıla değerini bulabiliriz. Örneğin $Q = 15$ için marjinal hasıla, $MR = 100Q - 4(15) = 40$ olacaktır.

Marjinal fonksiyolarla ilgili önemli bir noktayı vurgulamamız gerekir. Değişim oranı ile türev ifadelerinden elde edilecek marjinal hasıla değerleri tam olarak aynı olmayacak, fakat birbirlerine çok yakın olacaktır:

$$\frac{\Delta TR}{\Delta Q} \approx \frac{dTR}{dQ}$$

Bunun nedeni, türevin çok küçük bir değişimi ifade etmesidir. Buna karşılık değişim oranı, herhangi bir miktardaki değişimi gösterebilir. Bu noktayı daha iyi anlayabilmek için, yukarıdaki örneğimizi kullanarak marjinal hasılayı hem değişim oranı hem de türev yardımıyla hesaplayalım. Önce, satış miktarındaki bir birimlik bir artışın toplam hasılayı nasıl değiştirdiğine bakalım. $Q = 15$ değerini toplam hasıla fonksiyonunda yerine koyarsak

$$TR = 100(15) - 2(15)^2 = 1050$$

olarak elde ederiz. Şimdi satış miktarındaki bir birimlik bir artışın toplam hasılayı ne kadar artırdığına bakalım. $Q = 16$ için toplam hasıla,

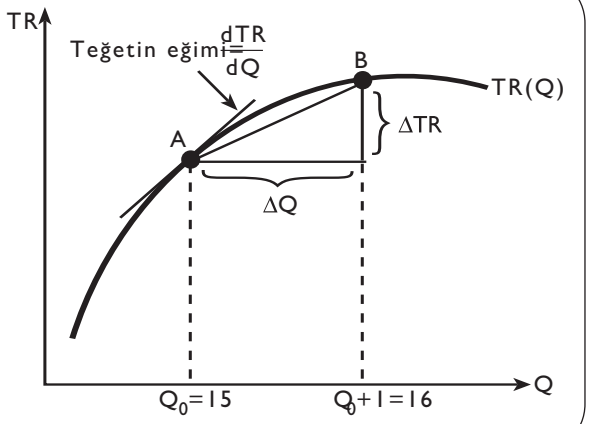
$$TR = 100(16) - 2(16)^2 = 1088$$

olacaktır. Burada $\Delta Q = 16 - 15 = 1$'dir. Görüldüğü gibi, satış miktarındaki biri birimlik artış toplam hasılayı, $\Delta TR = 1088 - 1050 = 38$ kadar artırmıştır. Dolayısıyla, değişim oranı olarak elde edilen marjinal hasıla

$$MR = \frac{\Delta TR}{\Delta Q} = \frac{38}{1} = 38$$

Şekil 1.5

Marjinal Hasılanın Değişim Oranı ve Türev Kullanılarak Elde Edilmesi



olarak elde edilir. Buna karşılık türev kullanarak, marjinal hasılayı 40 olarak elde etmiştik. Aradaki bu farkı şekil üzerinde görelim.

Şekil 1.5'te değişim oranı ve türev kullanılarak elde edilen marjinal hasıla değerleri arasındaki fark gösterilmiştir. Toplam hasılanın türevini alarak elde ettiğimiz marjinal hasıla, A noktasıdaki teğetin eğimine eşittir. Değişim oranını kullanarak elde ettiğimiz marjinal hasıla ise A ve B noktaları arasıdaki doğrunun eğimine eşittir. Görüldüğü gi-

bi teğetin eğimi daha fazla olduğu için, türev kullanarak elde ettiğimiz marjinal hasılanın değeri de, değişim oranı kullanarak elde ettiğimiz marjinal hasılanın değerinden daha fazladır. ΔQ değişim miktarı küçüldükçe her iki değer birbirine yaklaşacaktır.

SIRA SİZDE 3

Yukarıda, *TR* = 100Q – Q^2 olarak verilen toplam hasıla fonksiyonunda başlangıç değeri Q = 15 olmak üzere, ΔQ için sırasıyla {0,5; 0,2; 0,1; 0,05} değerlerini kullanarak, *değişim oranı* yardımıyla marjinal hasıla değerlerini bulunuz ve bu değerlerin, ΔQ küçüldükçe türev kullanarak elde ettiğimiz marjinal hasıla olan 40 değerine yaklaştığını gösteriniz.

Hasıla ile ilgili diğer bir kavram da **ortalama hasıla**dır. Ortalama hasıla, satılan birim başına hasıla değeridir ve toplam hasılanın satılan mal miktarına bölünmesiyle elde edilir:

Ortalama hasıla, satılan birim başına hasıla değeridir ve toplam hasılanın satılan mal miktarına bölünmesiyle elde edilir.

$$AR = \frac{TR}{Q}$$

Ortalama hasıla da, marjinal hasıla gibi satılan mal miktarının bir fonksiyonudur. Örneğin $TR = 100Q - 2Q^2$ olarak verilen bir toplam hasıla fonksiyonundan ortalama hasıla fonksiyonunu aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$AR = \frac{TR}{Q} = \frac{100Q - 2Q^2}{Q} = 100 - 2Q$$

Burada da görüldüğü gibi, ortalama hasıla fonksiyonu toplam hasıla fonksiyonunu elde etmek için kullandığımız talep fonksiyonu ile aynıdır. Gerçekten de toplam hasıla fonksiyonunu $TR = PQ$ olarak yazıp, sonra da ortalama hasılayı bulursak, $AR = TR/Q = P$ elde ederiz. Diğer bir ifade ile, *ortalama hasıla malın fiyatına, yani talep fonksiyonuna eşittir.*

Toplam hasıla fonksiyonunu, ortalama hasılayı kullanarak da ifade edebiliriz:

$$TR = PQ = AR \cdot Q$$

En sağdaki ifadenin türevini alırsak marjinal hasılayı, ortalama hasıla cinsinden ifade etmiş oluruz. Bu türevi almak için, çarpım kuralını uygulamamız gerekecektir:

$$\begin{aligned} MR = TR' &= \frac{dTR}{dQ} = \frac{dAR}{dQ}Q + \frac{dQ}{dQ}AR \\ &= AR' \cdot Q + AR \end{aligned}$$

Yukarıda TR' ve AR' ifadeleri sırasıyla, toplam hasıla ve ortalama hasıla fonksiyonlarının türevlerini ifade etmektedir. Toplam hasıla ile ortalama hasıla arasındaki yukarıda elde edilen ilişkiden faydalanarak verilen bir ortalama hasıla fonksiyonundan toplam hasıla ve marjinal hasıla fonksiyonlarını elde edebiliriz. Örneğin, ortalama hasıla fonksiyonu $AR = P = 120 - 3Q$ ise toplam hasıla fonksiyonu,

$$TR = AR \cdot Q = (120 - 3Q)\ Q = 120Q - 3Q^2$$

ve marjinal hasıla fonksiyonu,

$$\begin{aligned} MR &= AR' \cdot Q + AR \\ &= -3Q + 120 - 3Q \\ &= 120 - 6Q \end{aligned}$$

olarak bulunacaktır.

Toplam hasıla, ortalama hasıla ve marjinal hasıla fonksiyonları arasındaki ilişkiyi görmek için, $TR = aQ - bQ^2$ gibi bir toplam hasıla fonksiyonunu ele alalım. Buradan ortalama hasıla ve marjinal hasıla fonksiyonlarını aşağıdaki gibi elde ederiz:

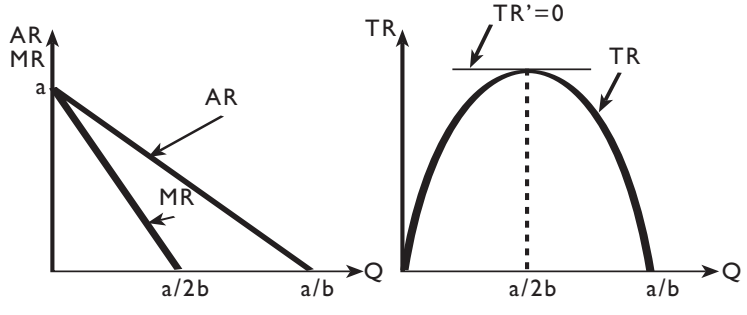
$$MR = a - 2bQ$$

$$AR = a - bQ$$

Görüldüğü gibi marjinal hasıla fonksiyonunun eğimi $-2b$ iken, ortalama hasıla fonksiyonunun eğimi $-b$'dir. Diğer bir ifade ile, marjinal hasıla fonksiyonu ortalama hasıla fonksiyonundan daha diktir. Bu durum Şekil 1.6'da görülmektedir.

Şekil 1.6

Toplam, Ortalama ve Marjinal Hasıla Fonksiyonları



Hem ortalama hasıla, hem de marjinal hasıla dikey ekseni aynı noktadan kesmektedir. Bu nedenle bütün Q değerleri için marjinal hasıla daima ortalama hasılanın altında olacaktır: $MR \leq AR$.

Şekil 1.6'da Q arttıkça toplam hasılanın önce arttığını sonra azaldığını görmekteyiz. Toplam hasıla, satış miktarı $Q = a/2b$ olana kadar artmaktadır. Bu nedenle $Q < a/2b$ olan bölgede, yani $Q = a/2b$ noktasının sol tarafında toplam hasılanın türevi pozitif olacaktır. Yani bu bölgede toplam hasıla artan bir fonksiyondur. Diğer bir ifade ile, bu bölgede marjinal hasıla sıfırdan büyüktür. Bunu sol taraftaki grafikte de görmekteyiz. $Q > a/2b$ olan bölgede ise toplam hasıla azalan bir fonksiyondur. Diğer bir ifade ile, marjinal hasıla sıfırdan küçüktür.

Toplam hasıla fonksiyonun artan fonksiyondan azalan fonksiyona dönüştüğü, yani $Q = a/2b$ olduğu noktada, türev sıfıra eşittir. Şekilde görüldüğü gibi, bu noktadaki teğet, miktar eksenine paraleldir, yani eğimi sıfırdır. Marjinal hasılanın sıfır olduğu bu nokta, aynı zamanda toplam hasılanın maksimum olduğu noktadır.

Buraya kadar bir monopol firmasının hasıla fonksiyonu ele aldık. Tam rekabet piyasasında faaliyet gösteren bir firmanın toplam, marjinal ve ortalama hasıla fonksiyonları farklı olacaktır. Bir tam rekabet firması fiyatı veri aldığı için, miktara bağ-

lı bir talep fonksiyonu ile karşı karşıya değildir. Tam rekabet firması için fiyat bütün satış miktarları için aynıdır. Bu durumda toplam hasıla fonksiyonu $TR = PQ$ şeklinde doğrusal bir fonksiyon olacaktır. Bu firmanın marjinal ve ortalama hasıla fonksiyonları da sabit ve fiyata eşit olacaktır:

$$MR = AR = P$$

Bu marjinal hasıla ve ortalama hasıla fonksiyonlarının grafiğini çizdiğimizde miktar eksenine paralel tek bir sabit fonksiyon elde ederiz.

Tam rekabet firması miktar eksenine paralel bir talep fonksiyonu ile karşı karşıyadır. Ürün fiyatı satılan mal miktarından bağımsızdır ve firma piyasada oluşan fiyatı veri olarak alır.

DİKKAT

Marjinal Maliyet

Hasıla için yaptığımız analizin bir benzerini maliyet için de yapabiliriz. **Marjinal maliyet,** üretim miktarındaki bir birim artışın toplam maliyette meydana getirdiği artıştır. Marjinal hasılanın toplam hasıla fonksiyonunun türevi olduğu gibi, *marjinal maliyet de toplam maliyet fonksiyonunun türevidir.* Üretim miktarının bir fonksiyonu olarak ifade edebileceğimiz toplam maliyet fonksiyonunu TC ile, marjinal maliyet fonksiyonunu ise MC ile gösterirsek, marjinal maliyet aşağıdaki gibi yazılabilir:

Marjinal maliyet fonksiyonu, toplam maliyet fonksiyonunun türevidir.

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = TC'$$

Firmaların marjinal maliyet fonksiyonları genellikle önce azalan, sonra artan bir grafiğe sahiptir. Böyle bir marjinal maliyet fonksiyonunun elde edilebilmesi için, toplam maliyet fonksiyonunun belli özelliklere sahip olması gerekir:

i) Toplam maliyet fonksiyonu türevi önce azalan, sonra artan bir fonksiyon olmalıdır.

ii) Üretim miktarı artarken toplam maliyet fonksiyonu asla azalmamalıdır.

Aşağıdaki gibi kübik bir fonksiyon, her iki özelliği de taşımaktadır:

$$TR = aQ^3 - bQ^2 + cQ + d, \qquad a, b, c, d > 0 \qquad \text{ve} \qquad b^2 < 3ac$$

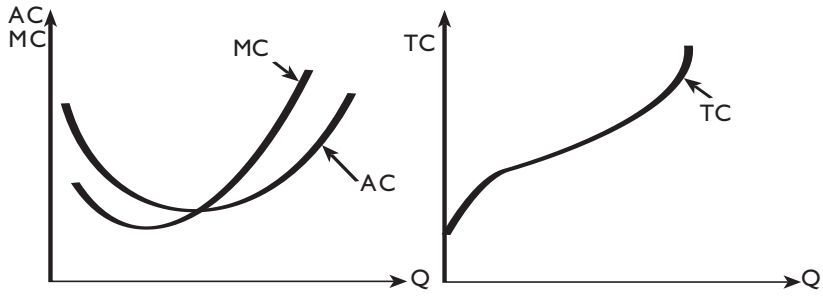
Bu fonksiyon üçüncü dereceden bir polinomdur. Böyle bir toplam maliyet fonksiyonundan elde edilecek **marjinal maliyet** (MC) ve **ortalama maliyet** (AC) fonksiyonları şöyle olacaktır:

$$MC = TC' = 3aQ^2 - 2bQ + c$$
$$AC = \frac{TC}{Q} = aQ^2 - bQ + c + \frac{d}{Q}$$

Bu şekildeki maliyet fonksiyonlarının grafikleri Şekil 1.7'de gösterilmiştir. Görüldüğü gibi, toplam maliyet fonksiyonu monoton, yani sürekli artan bir fonksiyondur. Buna karşılık, marjinal ve ortalama maliyet fonksiyonları önce azalan, sonra artan bir grafiğe sahiptir. Bunun nedeni, her iki fonksiyonun da karesel birer fonksiyon olmalarıdır.

Şekil 1.7

Toplam, Ortalama ve Marjinal Maliyet Fonksiyonları



Aşağıda verilen toplam maliyet fonksiyonundan, ortalama maliyet ve marjinal maliyet fonksiyonlarını elde edelim:

$TC = 2{,}5Q^3 - 13Q^2 + 50Q + 12$

Böyle bir toplam maliyet fonksiyonundan elde edilecek ortalama maliyet fonksiyonu,

$$AC = \frac{TC}{Q} = 2{,}5Q^2 - 13Q + 50 + \frac{12}{Q}$$

ve marjinal maliyet fonksiyonu,

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 7{,}5Q^2 - 26Q + 50$$

olarak bulunacaktır. Herhangi bir üretim seviyesi için ortalama veya marjinal maliyeti bulmak için, üretim miktarını elde edilen fonksiyonlarda yerine koymak yeterlidir. Örneğin $Q = 10$ için ortalama ve marjinal maliyetler aşağıdaki gibi olacaktır:

$$AC = 2{,}5(10)^2 - 13(10) + 50 + \frac{12}{10} = 171{,}2$$
$$MC = 7{,}5(10)^2 - 26(10) + 50 = 540$$

Marjinal Ürün

İktisat derslerinde herhangi bir üretim faktörünün marjinal fiziki ürününü, o üretim faktöründen ilave bir birimin kullanılması halinde toplam üretim miktarında meydana gelecek artış olarak öğrenmiştik. Bu tanım, üretim fonksiyonunun türevine karşılık gelmektedir. Sadece emek (L) faktörü kullanarak mal veya hizmet üreten bir firmayı ele alalım. Bu firmanın üretim fonksiyonunu iki temel özelliğe sahip olması gerekmektedir: (1) istihdam edilen emek faktörü artarken üretim miktarı da artmalıdır, (2) üretim miktarındaki artış, azalan oranda olmalıdır. İlk özellik emeğin marjinal fiziki ürününün pozitif olması gerektiğini söylemektedir. İkinci özellik ise, **azalan marjinal fiziki** ürün veya **azalan verimler yasası**na karşılık gelmektedir. Azalan verimler yasası, diğer faktörler sabit iken bir üretim faktöründen kullanılan miktarı artırmaya devam edersek toplam üretime yapacağı katkının giderek azalacağını söylemektedir.

Marjinal fiziki ürün, üretim fonksiyonunun türevi alınarak bulunur.

Şimdi de bir üretim fonksiyonunun sahip olması gereken özelliklerin matematiksel karşılıklarına bakalım. Birinci özellik, üretim fonksiyonunun türevinin pozitif olması anlamına gelmektedir. İkinci özellik ise üretim fonksiyonunun ikinci türevinin negatif olması demektir. Üretim miktarını Q ile, emek faktörünü L ile, emeğin marjinal fiziki ürününü ise MP_L ile gösterirsek, 1. ve 2. özellikleri aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\text{1. Özellik}: \quad \frac{dQ}{dL} = MPL > 0$$

$$\text{2. Özellik}: \quad \frac{d^2Q}{dL^2} = \frac{d(MPL)}{dL} < 0$$

Cobb-Douglas tipi bir üretim fonksiyonu, yukarıdaki özellikleri sağlamaktadır. Örneğin, $Q = 300\sqrt{L}$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun yukarıdaki iki özelliğe de sahip olduğunu kontrol edebiliriz. Önce bu fonksiyonun türevini alalım:

$$MPL \equiv \frac{dQ}{dL} = \frac{d}{dL}\left(300\sqrt{L}\right) = \frac{300}{2}\frac{1}{\sqrt{L}} = \frac{150}{\sqrt{L}} > 0$$

Emeğin marjinal fiziki ürününe eşit olan bu fonksiyon, bütün $L > 0$ değerleri için pozitiftir. Dolayısıyla bu fonksiyon, pozitif marjinal fiziki ürün koşulunu sağlamaktadır. Bu üretim fonksiyonunun azalan marjinal verimler yasasına uyup uymadığını görmek için ikinci türevini almamız gerekmektedir. Üretim fonksiyonunun ikinci türevinin, MPL fonksiyonunun birinci türevine karşılık geldiğine dikkat ediniz:

$$\frac{d^2Q}{dL^2} = \frac{d(MPL)}{dL} = \frac{d}{dL}\left(\frac{150}{\sqrt{L}}\right) = -\frac{150}{2}L^{-3/2} = -75L^{-3/2} < 0$$

Bu fonksiyon bütün $L > 0$ değerleri için negatiftir. Dolayısıyla azalan marjinal verimler yasası geçerlidir.

Üretimde kullanılan üretim faktörlerini sermaye ve emek olarak iki gruba ayırabiliriz. Üretim sürecinde genellikle, üretim miktarını değiştirmeden, bir faktörün diğer faktör yerine ikâme edilmesi mümkündür. Örneğin aynı üretim miktarında, kullanılan emek miktarı azaltılarak bunun yerine daha fazla sermaye kullanılması mümkün olabilir. Bir faktörden daha fazla kullanıldığında, artırılan miktarı ile üretim miktarını sabit tutmak için diğer faktörden azaltılması gereken miktara arasındaki orana **marjinal teknik ikâme oranı** denir ve $MRTS$ olarak gösterilir. $Q(K, L)$ gibi sermaye ve emek faktörlerinin kullanıldığı bir üretim sürecinde, $MRTS$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$MRTS = \frac{dK}{dL}$$

Marjinal teknik ikâme oranı aynı zamanda eş-ürün eğrilerinin eğimine eşittir. Örneğin, $Q = K^{1/3}\ L^{2/3}$ şeklindeki bir üretim fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonda sermaye faktörü K ile gösterilmiştir. Marjinal teknik ikâme oranını bulmak için, üretim fonksiyonunu sabit kabul ederek, fonksiyonu aşağıdaki gibi kapalı bir fonksiyon olarak yazalım.

$F(K, L) = K^{1/3} L^{2/3} = \bar{Q}$

Bu fonksiyon, **eş-ürün eğrisi** olarak bilinir. Marjinal teknik ikâme oranını bulmak için kapalı fonksiyon kuralını uygulamamız gerekir:

$$F_K = 1/3\, K^{-2/3} L^{2/3}$$
$$F_L = 2/3\, K^{1/3} L^{-1/3}$$
$$MRTS = \frac{dK}{dL} = -\frac{F_L}{F_K} = -\frac{2/3\, K^{1/3} L^{-1/3}}{1/3\, K^{-2/3} L^{2/3}} = -\frac{2/3}{1/3}\frac{K}{L} = -2\frac{K}{L}$$

ESNEKLİK

Firmaların karşı karşıya kaldıkları önemli problemlerden biri, fiyat değişikliklerinin toplam hasılalarında yapacağı etkinin tahmin edilmesidir. Örneğin, bir fiyat indirimi durumunda fiyatın düşmesi, toplam hasılayı azaltıcı bir etki yaratırken, satışlardaki indirim nedeniyle gerçekleşecek olan artış, toplam hasılayı artırıcı bir etki yaratacaktır. Bu nedenle net etkinin nasıl olacağı pek açık değildir. Negatif eğimli bir talep fonksiyonu ile karşı karşıya olan bir firma ürün fiyatını indirdiğinde, toplam hasılanın nasıl değişeceği talebin fiyat esnekliğine bağlıdır.

Talebin fiyat esnekliği, veya kısaca talep esnekliği, fiyattaki bir değişimin satılan mal miktarını nasıl etkileyeceğini gösteren bir ölçüttür. Talep esnekliği, satılan mal miktarındaki yüzde değişimin fiyattaki yüzde değişime bölünmesiyle bulunur:

$$E = \frac{\text{Miktardaki yüzde değişim}}{\text{Fiyattaki yüzde değişim}}$$

İktisatta çok çeşitli esneklikler söz konusudur. Bununla birlikte hepsinin hesaplanmasındaki mantık aynıdır. Bütün esneklikler iki yüzde değişimin birbirlerine oranıdır. Peki ama, bir değişkenin yüzde değişimi nasıl hesaplanır? Örneğin fiyat değişkenini ele alalım. Fiyatta meydana gelen değişimi yüzdelik olarak hesaplamak için, iki fiyat arasındaki farkı başlangıç fiyatına böleriz. Fiyatın P_1 = 12'den P_2 = 14'e yükseldiği durumu ele alalım. Bu durumda fiyattaki yüzde değişim,

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{\Delta P}{P_1} = \frac{14-12}{12} = \frac{1}{6} \simeq 0{,}16$$

yaklaşık %16 olmuştur. Bu hesaplamadan hareketle esnekliği aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$E = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\Delta Q}{Q} \cdot \frac{P}{\Delta P} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q}$$

Fiyattaki çok küçük bir değişimin etkisinden bahsettiğimizde, $\Delta Q/\Delta P$ terimini dQ/dP türevi ile değişirebiliriz. Bu durumda esneklik formülü aşağıdaki gibi olacaktır:

$$E = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

Bu şekilde hesaplanan esneklik **nokta esneklik** olarak adlandırılır. Fiyat ile talep edilen miktar arasında ters yönlü bir ilişki olduğu için, bulacağımız esneklik değeri negatif olacaktır. Esneklik değerlerini değerlendirirken genellikle önemli olan mutlak büyüklükleridir. Esnekliğin mutlak değerinin birden küçük, birden büyük ve bire eşit olmasına göre, talep hakkında aşağıdaki değerlendirmeler yapılır:

- $|E| < 1$ ise "inelastik" talep.
- $|E| = 1$ ise "birim esnek" talep.
- $|E| > 1$ ise "esnek" talep.

Talep edilen miktarı, fiyatın bir fonksiyonu olarak ifade eden fonksiyona **ters talep fonksiyonu** adı verilir.

Şimdi $P = 50 - 2Q$ olarak verilen bir talep fonksiyonunu ele alalım ve fiyatın 30 olduğu durumdaki talep esnekliğini bulalım. Bunun için önce dQ/dP türevini bulmamız gerekir. Fakat bu fonksiyon fiyatı, miktarın bir fonksiyonu, $P = P(Q)$ olarak ifade etmektedir. Bizim dQ/dP türevini bulabilmemiz için miktarı, fiyatın bir fonksiyonu, $Q = Q(P)$ olarak ifade etmemiz gerekir. $Q = Q(P)$ fonksiyonu **ters talep fonksiyonu** olarak da adlandırılır. Ters talep fonksiyonunu elde etmek için, talep fonksiyonunu Q için çözmemiz gerekir:

$$P = 50 - 2Q \quad \Rightarrow \quad 2Q = 50 - P \quad \Rightarrow \quad Q = 25 - \frac{1}{2}P$$

Bu durumda, $dQ/dP = -1/2$ olacaktır. Esnekliği bulabilmek için ayrıca, $P = 30$ olduğunda talep edilen miktara ihtiyacımız vardır. Bunu da fiyatı, elde ettiğimiz talep fonksiyonunda yerine koyarak buluruz: $Q = 25 - 1/2(30) = 10$. Artık esnekliği hesaplamak için gerekli bütün değerlere sahibiz:

$$E = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{30}{10} = -1{,}5$$

$|E| > 1$ olduğu için talep fonksiyonunun bu noktada "esnek" olduğu sonucuna varırız.

Esneklik konusunda en sık karıştırılan husus, esneklik ile eğim arasındaki farktır. Esneklik eğim ile ilişkili olmasına rağmen, aynı şey değildir. Örneğin, doğrusal bir talep fonksiyonunda eğim her noktada aynı olmasına rağmen, esneklik her noktada farklı olacaktır. Bunu yukarıdaki örnekte görmekteyiz. $P = 50 - 2Q$ olarak verilen talep fonksiyonu için bulduğumuz esneklik değeri P ve Q'ya bağlı olarak değişen bir fonksiyondur. Bununla birlikte bu talep fonksiyonunun eğimi her yerde -2'dir.

Esnekliğin her yerde aynı olduğu fonksiyonlar da vardır. Bu tür fonksiyonlar sabit esneklik fonksiyonları olarak adlandırılırlar. Örneğin $P = 4Q^{-1/2}$ fonksiyonunu ele alalım ve talep esnekliğini bulalım. Öncelikle ters talep fonksiyonunu bulmamız gerekir:

$$Q = \left(\frac{1}{4}P\right)^{-2} = 16P^{-2}$$

Bu fonksiyonun türevini esneklik formülünde yerine koyarsak

$$E = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = -32P^{-3} \cdot \frac{P}{Q} = -32\frac{P^{-2}}{Q}$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadede Q yerine ters talep fonksiyonunu yerleştirir ve gerekli sadeleştirmeleri yaparsak, talep esnekliğini aşağıdaki gibi buluruz:

$$E = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = -32 \frac{\cancel{P^{-2}}}{16\cancel{P^{-2}}} = -2$$

Görüldüğü gibi, esneklik Q veya P değerlerine bağlı olmadan her yerde aynıdır. Bu fonksiyonun eğimi ise her yerde aynı değildir.

Esneklik ile toplam hasıla arasında ne gibi bir ilişki vardır? Bu soruyu cevaplamak için önce toplam hasılayı ele alalım. Toplam hasıla $TR = PQ$ olduğuna göre, fiyat artışının toplam hasıla üzerindeki etkisini görmek için aşağıdaki türeve bakmalıyız:

$$\frac{dTR}{dP}$$

Dikkat ediniz, yukarıdaki türevi bulabilmemiz için toplam hasılayı miktarın bir fonksiyonu, $TR(Q)$ olarak değil, fiyatın bir fonksiyonu, $TR(P)$ olarak yazmamız gerekir. Fiyat ve talep edilen miktar, talep fonksiyonu aracılığıyla birbirleri ile ilişkili olduğundan, bunu yapmak zor değildir. Yapmamız gereken ters talep fonksiyonu adı verdiğimiz $Q(P)$ fonksiyonunu elde etmektir. Bunu daha önce yapmıştık. Bu fonksiyonu toplam hasıla ifadesinde yerine koyarsak toplam hasılayı fiyatın bir fonksiyonu olarak ifade etmiş oluruz:

$$TR(P) = P \cdot Q(P)$$

Buradan dTR/dP türevini elde etmek için, çarpım kuralını uygulamamız gerekir:

$$\begin{aligned} \frac{dTR(P)}{dP} &= \frac{dP}{dP} \cdot Q + \frac{dQ(P)}{dP} P \\ &= Q + \frac{dQ(P)}{dP} P \qquad \left(\frac{dP}{dP} = 1\right) \end{aligned}$$

Bu ifadeyi Q parantezine alalım:

$$\frac{dTR(P)}{dP} = Q\left(1 + \frac{dQ(P)}{dP} \cdot \frac{P}{Q}\right)$$

Parantez içerisindeki ikinci ifadenin talebin fiyat esnekliği olduğu görülmektedir. Bunu ifadede yerine koyarsak:

$$\frac{dTR(P)}{dP} = Q(1 + E)$$

Talebin fiyat esnekliğinin negatif olduğunu hatırlayalım. Bu nedenle eğer $|E| > 1$ ise, $dTR/dP < 0$ olacaktır. Dolayısıyla, fiyattaki bir indirim toplam hasılayı artıracaktır. Eğer $|E| < 1$ ise, $dTR/dP > 0$ olacaktır ve fiyattaki bir indirim toplam hasılayı azaltacaktır:

$$|E| > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dTR(P)}{dP} < 0 \quad \Rightarrow P\downarrow, TR\uparrow$$

$$|E| < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dTR(P)}{dP} > 0 \quad \Rightarrow P\downarrow, TR\downarrow$$

Eğer $|E|=1$ ise, $dTR/dP = 0$ olacaktır ve fiyat değişikliği toplam hasılayı etkilemeyecektir.

TÜKETİM VE TASARRUF

Marjinal tüketim eğilimi, tüketim fonksiyonunun türevi alınarak bulunur.

İktisat derslerinden Keynesyen tüketim fonksiyonunun toplam tüketim harcamalarını (C) , gelir (Y) ile açıkladığını biliyoruz: $C(Y)$. Bu fonksiyon, kamu sektörünün ve dolayısıyla vergilerin olmadığı basit bir ekonomi için, genellikle $C = c_0 + c_1 Y$ şeklindeki doğrusal bir fonksiyon olarak yazılır. Fonksiyondaki c_1 katsayısı özel bir öneme sahiptir. **Marjinal tüketim eğilimi** adı verilen bu katsayı, gelirdeki bir liralık artışın ne kadarının tüketime gittiğini gösterir. Bu açıklamadan anlaşılacağı gibi aslında marjinal tüketim eğilimi, tüketim fonksiyonunun türevinden başka bir şey değildir:

$$\text{Marjinal Tüketim Eğilimi } (MPC) = \frac{dC}{dY} = C' = c_1$$

Yine iktisat derslerinden, toplam gelirin tüketime gitmeyen kısmının tasarruf edildiğini biliyoruz: $Y = C + S$. Bu ilişkiyi kullanarak bir tasarruf fonksiyonu elde edebiliriz:

$$Y = C + S \quad \Rightarrow \quad S = Y - C$$
$$S = Y - c_0 - c_1 Y$$
$$S = -c_0 + (1 - c_1)Y$$

Elde ettiğimiz bu tasarruf fonksiyonu, tüketim fonksiyonunun aksine pozitif eğimlidir. Tasarruf fonksiyonunun türevi bize marjinal tasarruf eğilimini verir. Marjinal tasarruf eğilimi, gelirdeki bir liralık artışın ne kadarının tasarruf edildiğini gösterir:

$$\text{Marjinal Tasarruf Eğilimi } (MPS) = \frac{dS}{dY} = S' = 1 - c_1$$

Marjinal tasarruf eğilimi, tasarruf fonksiyonunun türevi alınarak bulunur.

Marjinal tasarruf eğilimi ile marjinal tüketim eğiliminin toplamlarının bire eşit olduğuna dikkat ediniz: $MPS + MPC = (1 - c_1) + c_1 = 1$. Elde edilen gelirin ya tüketime, ya da tasarrufa gittiği düşünülürse, bu sonuç hiç de sürpriz değildir.

Yukarıdaki açıklamalar çerçevesinde $C = 150 - 0{,}8Y$ olarak verilen bir tüketim fonksiyonundan hareketle, marjinal tüketim eğilimi, tasarruf fonksiyonu ve marjinal tasarruf eğilimini elde edebiliriz. Marjinal tüketim eğilimi $MPS = C' = 0.8$ olacaktır. Marjinal tasarruf eğilimini bulmak için tasarruf fonksiyonuna ihtiyacımız yoktur. $MPC + MPS = 1$ olduğuna göre, $MPS = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ olacaktır. Tasarruf fonksiyonu ise

$$S = Y - C = Y - 150 + 0{,}8Y$$
$$= -150 + (1 - 0{,}8)Y$$
$$= -150 + 0{,}2Y$$

olarak elde edilir.

Özet

AMAÇ 1

Limit ve süreklilik kavramlarını açıklayabilmek ve fonksiyonların limitlerini bulmak

Matematikteki türev kavramı, iktisadi analizde çok önemli bir yer işgal etmektedir. Birçok iktisadi kavram ancak türev yardımıyla ifade edilebilmektedir. Bu nedenle türev kavramı, iktisadi analizleri matematik yardımıyla yapabilmemiz için önemli bir araç olarak karşımıza çıkmaktadır.

Limit, bir fonksiyonun bağımsız değişkeni belli bir değere yaklaşırken, fonksiyonun yaklaştığı değeri gösterir. Sağdan limit, bir $f(x)$ fonksiyonunun, x a'ya yaklaşırken sağdan limiti x a'ya, a'dan daha büyük değerlerden yaklaşırken fonksiyonun yaklaştığı değerdir. Soldan limit, bir $f(x)$ fonksiyonunun, x a'ya yaklaşırken soldan limiti x a'ya, a'dan küçük değerlerden yaklaşırken fonksiyonun yaklaştığı değerdir.

Eğer bir fonksiyonun sağdan ve soldan limitleri mevcut ve birbirlerine eşit ise bu fonksiyonun limiti vardır. Bu durumda sağdan ve soldan limitler şeklinde ifade etmeye gerek yoktur ve "+"/"-" işaretlerini kullanmadan sadece fonksiyonun limitinden bahsedebiliriz. Bir fonksiyonun bir a noktasında sağdan ve soldan limitleri mevcut olsa bile, bu limitler birbirlerine eşit değilse bu fonksiyonun a noktasında limiti yoktur.

Bir fonksiyonun limiti mevcut ise ve bu limit fonksiyonun değerine eşit ise o fonksiyon **"sürekli"** bir fonksiyondur.

AMAÇ 2

Türevin matematiksel ve iktisadi anlamını açıklayabilmek, fonksiyonların türevlerini almak

Türev, birbirleriyle ilişkili iki değişkenden biri artarken diğer değişkenin nasıl değişeceğini gösterir. Bir fonksiyonun türevinin alınabilmesi için, sürekli olması ve keskin köşelere sahip olmaması gerekir.

Bir fonksiyonun herhangi bir noktadaki türevi, fonksiyonun o noktada artan mı, yoksa azalan mı olduğunu gösterir. Fonksiyonun bir noktadaki türevi pozitif ise, fonksiyon o noktada artandır. Fonksiyonun bir noktadaki türevi negatif ise fonksiyon bu noktada azalandır.

Türevini aldığımız bir fonksiyonun, tekrar türevini alabiliriz. Bunlara yüksek dereceden türevler adı verilir.

AMAÇ 3

Marjinal kavramını açıklamak

Bir fonksiyonun türevi alınarak elde edilen fonksiyon, "marjinal fonksiyon" olarak adlandırılır. Marjinal fonksiyon, bir fonksiyonun bağımsız değişkenindeki çok küçük bir değişimin fonksyonun değerini nasıl değiştirdiğini gösterir.

AMAÇ 4

Türevi iktisadi analize uygulamak

Monopolcü firma negatif eğimli bir talep fonksiyonu ile karşı karşıyadır. Firmanın sattığı ürün miktarı ile fiyatı arasında ters yönlü bir ilişki vardır. Marjinal hasıla, toplam hasıla fonksiyonunun türevidir. Marjinal maliyet, üretim miktarındaki bir birim artışın toplam maliyette meydana getirdiği artıştır. Marjinal maliyet toplam maliyet fonksiyonunun türevidir.

Bir firmanın üretim fonksiyonu iki temel özelliğe sahiptir: (1) pozitif marjinal fiziki ürün, (2) azalan marjinal verimler yasası. Marjinal fiziki ürün, bir üretim faktöründen ilave bir birimin kullanılması halinde toplam üretim miktarında meydana gelecek artıştır.

Talebin fiyat esnekliği, veya kısaca talep esnekliği, fiyattaki bir değişimin satılan mal miktarını nasıl etkileyeceğini gösteren bir ölçüttür. Talep esnekliği, satılan mal miktarındaki yüzde değişimin fiyattaki yüzde değişime bölünmesiyle bulunur.

Marjinal tüketim eğilimi, gelirdeki bir liralık artışın ne kadarının tüketime gittiğini gösterir. Marjinal tüketim eğilimi, tüketim fonksiyonunun türevi alınarak bulunur. Marjinal tasarruf eğilimi, gelirdeki bir liralık artışın ne kadarının tasarruf edildiğini gösterir. Tasarruf fonksiyonunun türevi bize marjinal tasarruf eğilimini verir.

2

Amaçlarımız

Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- Fonksiyon kavramını ve fonksiyonla ilişkili diğer temel kavramları tanımlayabilecek,
- Fonksiyonların matematiksel özelliklerini açıklayabilecek,
- Doğrusal fonksiyonları tanımlayıp iktisattaki kullanım alanlarını örnekleyebilecek,
- Karesel fonksiyonların çözümünü yapıp iktisadi uygulamalarını gösterebilecek bilgi ve becerilere sahip olacaksınız.

Anahtar Kavramlar

- Fonksiyon
- Tek değişkenli fonksiyon
- Doğrusal fonksiyon
- Karesel fonksiyon
- Fonksiyonun Grafiği

İçindekiler

Matematiksel İktisat

Tek Değişkenli Fonksiyonlar

- FONKSİYON KAVRAMI VE FONKSİYONLA İLİŞKİLİ TEMEL KAVRAMLAR
- FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ
- DOĞRUSAL FONKSİYONLAR
- KARESEL (KUADRATİK) FONKSİYONLAR

Tek Değişkenli Fonksiyonlar

FONKSİYON KAVRAMI VE FONKSİYONLA İLİŞKİLİ TEMEL KAVRAMLAR

Teorik ve uygulamalı matematikte önemli bir kavram olan fonksiyonlar, iktisat bilimi içerisinde de birçok uygulama alanı bulmaktadır. İktisadi olayları incelerken arz ve talep fonksiyonu, maliyet fonksiyonu, üretim fonksiyonu, tüketim fonksiyonu gibi birçok tanımla karşılaşırız. Bu kadar sık karşılaştığımız bir kavramı daha iyi anlayabilmek için önce fonsiyonlarla ilgili temel kavramları inceleyip sonrasında da tek değişkenli fonksiyonların iktisatta kullamına yönelik uygulamalar yapacağız.

Bir fonksiyonel ilişkide değişik değerler alabilen niceliklere değişken adı verilir. Bir değişkenin veri değerindeki değişme, başka bir değişkende bir değişmeye yol açıyorsa veri değişken diğer değişkenin bir fonksiyonudur ve aralarında fonksiyonel bir ilişki vardır. Kısaca bir fonksiyon, bir niceliğin (çıktı) başka bir niceliğe (girdi) ne şeklide bağlı olduğunu ifade eden özel bir ilişki türüdür. Fonksiyonel ilişkiler genellikle girdiye karşılık çıktıyı bulmak için ne yapılması gerektiğini gösteren bir formülle belirtilir. Örneğin bir dairenin alanı yarıçapının fonksiyonudur ve $A=\pi r^2$ formülü ile hesaplanabilir. Farklı boyutlardaki dairelerin yarıçapları da farklı olacağından değişkenin veri değeri değişmektedir. Buna bağlı olarak da belirtilen formüle göre hesaplanacak alan değişecektir. İktisatta da aralarında fonksiyonel ilişki bulunan birçok değişkenle karşılaşırız. Örneğin harcanabilir gelir arttığında tüketim harcamaları da artar. Yani tüketim, harcanabilir gelirin bir fonksiyonudur. Bir malın fiyatı arttığında talep edilen miktar düşer. Dolayısıyla talep edilen miktar, fiyatın bir fonksiyonudur.

Bir değişkenin, başka bir değişkenin fonksiyonu olduğunu ifade etmek için her zaman matematiksel bir formüle ihtiyacımız olmaz. Örneğin Tablo 2.1' de 2004 - 2010 döneminde Türkiye'nin reel GSYIH verileri gösterilmektedir. Bu tablo da GSYIH'yi takvim yılının ya da zamanın bir fonksiyonu olarak ifade etmektedir.

Yıl	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
GSYIH	83485591	90499731	96738320	101254625	101921730	97003114	105738813

Tablo 2.1 *Sabit (1988) fiyatlarla Harcamalar Yöntemiyle GSYIH*

Kaynak: *Türkiye Cumhuriyeti Merkez Bankası*

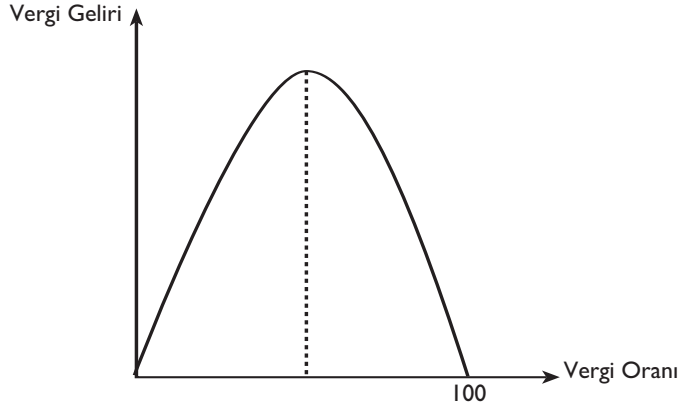
Bazen günlük hayatımızda da bilerek veya bilmeyerek fonksiyonel ilişkilerden bahsederiz. Örneğin kadınların eğitim düzeyi artarsa bebek ölümlerinin azalacağını söyleriz. Yani kadınların eğitim düzeyi ile bebek ölümleri arasında bir fonksiyo-

nel ilişki kurarız. Ya da ülkedeki yatırım düzeyinin artışına bağlı olarak millî gelirin de artması gerektiğini belirtiriz. Kısaca fonksiyon aslında hayatımızın içine yerleşmiş bir kavramdır.

İki değişken arasındaki fonksiyonel ilişki bir grafik yardımı ile de gösterilebilir. Şekil 2.1'de arz yanlı iktisadın önemli kavramlarından biri olan Laffer eğrisi bulunmaktadır. Bu eğri vergi oranları ile devletin tahsil edeceği toplam vergi gelirleri arasındaki ilişkiyi gösterir. Buna göre, bireyler vergi oranlarında yapılacak artışlara tepki verirler. Vergi düzeyindeki artış belli bir noktaya kadar devletin vergi gelirlerinin artmasını sağlarken, vergilerin daha da yükseltilmesi bireylerin vergi ödemekten kaçınma eğilimi göstermesine, dolayısıyla devletin vergi gelirlerinin azalmasına yol açar. Uç durumları ele alırsak; vergi oranı %0 ise elbette vergi geliri de sıfır olacaktır, vergi oranı %100 olduğunda ise kimse tüm kazancını devlete vergi olarak vermek istemeyeceğinden gene vergi geliri sıfır olur.

Şekil 2.1

Laffer Eğrisi



Tüm bu ilişkilerin ortak özelliği bir değişkenin değerini başka bir değişkenin değeri ile ilişkilendirirken belli bir kurala bağlı kalmasıdır. Bu kural ise değişkenlerin neler olduklarına ve aralarındaki ilişkilerin yapısına bağlı olarak değişmektedir.

Fonksiyonla İlişkili Temel Kavramlar

Küme: Küme birtakım nesnelerden oluşan bir topluluktur. Bir kümeyi oluşturan nesnelere, bu kümenin elemanları adı verilir. Kümeler genellikle A, B, C, ... gibi büyük harflerle ve elemanları da a,b,c, ... gibi küçük harflerle gösterilir. Örneğin "2001 yılı itibariyle Nobel ödülü alan iktisatçılar" şeklinde tanımlanan bir kümenin 46 tane elemanı vardır. Bir nesnenin, bir kümenin elemanı olduğunu belirtmek için $\in$ sembolü kullanılır. Örneğin Nobel ödülü alan iktisatçılar kümesine N dersek;

Robert Mundell $\in$ N James Tobin $\in$ N.

Sıralı ikili: A ve B gibi iki küme verilsin. $a \in$ A ve $b \in B$ olmak üzere, bunlardan oluşturulan (a,b) çiftine bir sıralı ikili denir. (a,b) sıralı ikilisinde a'ya sıralı ikilinin birinci terimi (koordinatı), b'ye sıralı ikilinin ikinci terimi (koordinatı) adı verilir. (a,b) ve (c,d) gibi iki sıralı ikilinin eşit olabilmesi için gerek ve yeter koşul, sıralı ikililerin birinci ve ikinci koordinatlarının karşılıklı olarak eşit olmasıdır. Yani

$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ ve $b = d$ olmalıdır.

a ≠ b* ise *(a, b) ≠ (b, a)

DİKKAT

Bağıntı: A ve B kümeleri verilmiş olsun. A x B kümesinin her alt kümesine A kümesinden B kümesine bir bağıntı denir.

Fonksiyon: Bir kümenin elemanları, başka bir kümenin elamanları ile ilişki içerisinde olabilir. Bu ilişkinin bazı kurallar çerçevesinde oluşturulan özel bir biçimine de fonksiyon adı verilir. Bir kümenin her elamanı diğer kümenin tek bir elemanı ile eşleşiyorsa buna fonksiyon adı verilmektedir.

A'dan B'ye bir f bağıntısının bir fonksiyon olabilmesi için A kümesinin her elemanı B kümesinin tek bir elemanı ile eşlenmelidir.

Boş olmayan A ve B kümeleri verilsin. A kümesinden B kümesine tanımlanan bir f bağıntısı aşağıdaki koşulları sağlarsa f'ye A'dan B'ye bir fonksiyondur denir:

i. f bağıntısı altında A'nın her elemanı B'nin en az bir elemanı ile eşlenmelidir.

ii. f bağıntısı altında A'nın her elemanı B'nin birden fazla elemanı ile eşlenmemelidir.

Fonksiyonun bu tanımından hareketle, her fonksiyonun bir bağıntı olması gerekir ancak her bağıntı bir fonksiyon olmayabilir.

Tanım Kümesi: Kuralın uygulandığı tüm girdi sayılarının kümesidir.

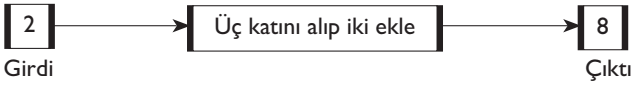
Değer Kümesi: Tüm çıktı sayılarının kümesidir.

X kümesinin her elemanını Y kümesinin yalnızca bir elemanı ile eşleştiren *f* fonksiyonu

$$f : X \mapsto Y$$

şeklinde gösterilir. Bu durumda X kümesi fonksiyonun tanım kümesidir. Verilen kurala göre gerçekleşen değerler kümesi ise fonksiyonun değer kümesidir.

Örneğin fonksiyonla belirlenen kural "üç katını alıp iki ekle" şeklinde olsun. Bu kuralı kısaca $y=3x+2$ şeklinde veya $f(x) = 3x+2$ şeklinde gösterebiliriz. Tanım kümesinin elemanları da 2 ve -3 olsun. Bu durumda değer kümesinin elemanları da 8 [$y=3(2)+2$] ve -7 [$y=3(-3)+2$] olur. 2 girdisine 8 çıktısını atayan *f* 'yi göstermek için $f(2)=8$ yazılır ve "2 noktasında *f* 8'e eşittir" biçiminde okunur. Benzer olarak $f(-3)=-7$'dir.



Bir fonksiyon için girdi sayılarını temsil eden bir değişken bağımsız değişken olarak adlandırılır. Çıktı sayılarını temsil eden bir değişken ise bağımlı değişken olarak adlandırılır. Çünkü alacağı değer, bağımsız değişkenin aldığı değere bağlıdır.

İçsel değişken: Değeri model tarafından belirlenen değişkendir.

Dışsal değişken: Değere modelin dışında belirlenen değişkendir. Bir modelde içsel olan bir değişken başka bir modelde dışsal olabilir.

$y = f(x)$ şekildeki bir fonksiyonda, *y* bağımlı değişken ya da fonksiyonun değeridir. İktisatta *y* değişkenine içsel değişken de denir. *x* ise bağımsız değişken ya da fonksiyonun argümanıdır. *x* değişkenine ise genellikle dışsal değişken denir.

$f(x)$ fonksiyonu *x*'in herhengi bir değeri için *y*'ye tek bir değer atarken farklı fonksiyonel biçimlerde olabilir. $y = \alpha+\beta x$ şeklindeki bir fonksiyonda yunan alfabesinden harfler olan α ve β parametre olarak adlandırılır. Parametre bir etki ya da ilişki göstermek için kullanılan değişkendir. Parametrelerin sayısal değerleri belirlendikten sonra bağımsız değişkenin farklı değerlerine göre fonksiyonun değerini bulabiliriz. Örneğin basit Keynesyen tüketim fonksiyonunda Tüketim (C), harcanabilir gelir (Y_d) ile ilişkilendirilmektedir. Bu iki değişken arasındaki fonksiyonel ilişki $C=200+0,7Y_d$ şeklinde belirlenmiş ve harcanabilir gelirin farklı değerlerine bağlı olarak tüketim miktarları hesaplanarak Tablo 2.2' de gösterilmiştir.

Tablo 2.2
Keynesyen Tüketim Fonksiyonu

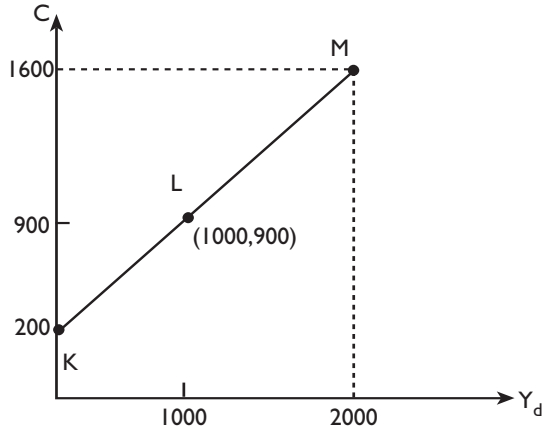
Y_d	0	1000	2000	3000	4000
C	200	900	1600	2300	3000

Fonksiyonların Grafiklerinin Çizilmesi

Tablo 2.2'de bağımsız değişken olan harcanabilir gelirin farklı değerlerine bağlı olarak bağımlı değişken olan tüketimin değerleri gösterilmektedir. Tüketim fonksiyonunun grafiğini çizebilmek için gerekli olan sıralı ikilileri bu tablodan yararlanarak elde edebiliriz. Sıralı ikililer bir parantez içerisinde ve birbirinden virgül ile ayrılarak gösterilir. Parantezin içindeki ilk sayı fonksiyonun argümanını, ikinci sayı ise fonksiyonun değerini temsil eder. $y = f(x)$ şeklindeki bir fonksiyonda sıralı ikililer (x, y) biçiminde gösterilir. Tablo 2.2'den elde edilen sıralı ikililerden bazıları (1000,900), (2000,1600), (3000,2300) şeklindedir.

Sıralı ikililer kartezyen düzlemi üzerinde işaretlendikten sonra belirlenen noktalar birleştirilerek fonksiyonun grafiğine ulaşılır. Kartezyen düzlemi eksen olarak adlandırılan birbirine dik iki doğrunun kesiştirilmesi ile oluşturulur. Çizilen yatay ve dikey eksenler belirli bir orijin (merkez ya da odak) noktasında kesişir. Yatay eksene aynı zamanda x ekseni, dikey eksene ise y ekseni denmektedir. Kartezyen düzleminde x değişkeninin değerleri yatay eksende, y değişkeninin değerleri dikey eksende ölçülür. x'in pozitif değerleri orijin noktasının sağında, negatif değerleri ise orijin noktasının solunda yer alır. y'nin pozitif değerleri orijin noktasının üstünde, negatif değerleri ise orijin noktasının altında gösterilir. Bir noktanın koordinatları sıralı ikilinin değerleridir ve düzlemde o noktanın adresini temsil eder. (x,y) sıralı ikilisinin x koordinatına apsis, y koordinatına ise ordinat adı verilir. Dolayısıyla orijin (0,0) koordinatları ile gösterilir.

Şekil 2.2
Tüketim Fonksiyonu



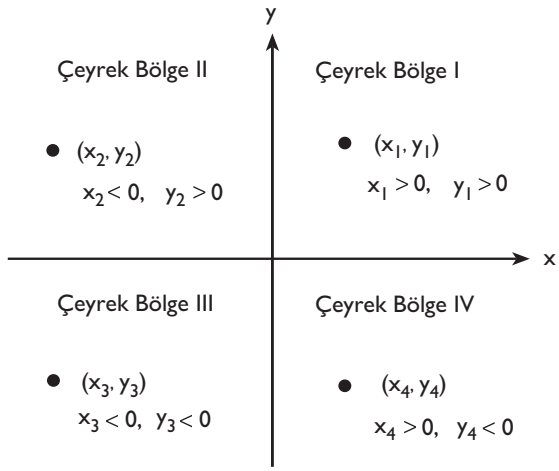
Şekil 2.2'de tüketim fonksiyonu için belirlenen sıralı ikililer kartezyen düzleminde işaretlenmiş ve sonrasında bu belirlenen noktalar birleştirilerek tüketim fonksiyonunun grafiği elde edilmiştir.

Bir fonksiyonun grafiği koordinatları sıralı ikililer tarafından belirlenen tüm noktaların birleştirilmesi ile elde edilir. Harcanabilir gelirin [0,2000] aralığında tanımlandığı tüketim fonksiyonun grafiği Şekil 2.2'de *KM* doğrusu ile gösterilmektedir. Bu doğru tablo 2.2'deki verilerden yararlanılarak işaretlenen ilk 3 nokta birleştirilerek elde edilmiştir. Tablodaki diğer sıralı ikililerden elde edilecek noktaların da bu doğru üzerinde yer aldıkları gösterilebilir. Bir noktadan sonsuz sayıda doğru geçebilmesine rağmen, iki nokta birleştirilerek sadece bir doğru elde edilebilir.

Şekil 2.2'de gösterilmemesine rağmen aslında kartezyen düzlemi çeyrek bölgeler ya da quadrant olarak adlandırılan dört bölgeye ayrılmaktadır. Şekil 2.3'te görüldüğü gibi örneğin I. Çeyrek bölge $x_1 > 0$ ve $y_1 > 0$ olan tüm (x_1, y_1) noktalarını içerir.

Şekil 2.3

Çeyrek Bölgeler



FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

Fonksiyonları grafikler kullanarak görsel olarak inceleyebileceğimiz gibi, matematiksel özelliklerini kullanarak iktisadi açıdan da yorumlayabiliriz. Bunun için fonksiyonların temel özelliklerini bilmemiz gerekir. Örneğin şekil 2.2'de gösterilen tüketim fonksiyonunda gelir arttıkça tüketim de sürekli artmaktadır. İktisatta kullanılan başka fonksiyonlarda, fonksiyonun argümanındaki artış sonucunda, değerinin azaldığı da görülebilir. Örneğin fiyatın bir fonksiyonu olarak ifade edilen talep fonksiyonunda bir malın fiyatı artınca talep edilen miktar azalmaktadır. Bu nedenle artan ve azalan fonksiyon kavramlarını bilmek bizim için önemlidir.

Artan ve Azalan Fonksiyonlar

$y = f(x)$ formundaki bir fonksiyonun $x_2 > x_1$ koşulunu sağlayan iki argümanı x_1 ve x_2 olsun. Eğer

$f(x_2) \geq f(x_1)$ ise fonksiyon artandır,
$f(x_2) > f(x_1)$ ise fonksiyon kesin artandır,
$f(x_2) \leq f(x_1)$ ise fonksiyon azalandır,
$f(x_2) < f(x_1)$ ise fonksiyon kesin azalandır.

Bu tanımlardan hareketle, kesin artan fonksiyonun, aynı zamanda artan bir fonksiyon olduğunu ve kesin azalan bir fonksiyonun aynı zamanda azalan bir fonksiyon olduğunu söyleyebiliriz. Ancak bunun tersi geçerli değildir. Yani artan bir fonksiyon, kesin artan bir fonksiyon olmayabilir. Çünkü artan bir fonksiyonda $f(x_2) = f(x_1)$ olan bir bölge bulunabilir.

Artan ve azalan fonksiyon kavramları ile ilişkili olan bir başka konu da monoton ve monoton olmayan fonksiyon kavramlarıdır.

Monoton, Kesin Monoton ve Monoton Olmayan Fonksiyon

Eğer bir fonksiyon
Artıyor ya da azalıyorsa buna monoton fonksiyon denir.
Kesin artıyor ya da kesin azalıyorsa kesin monoton fonksiyon denir.
Belli bir aralıkta kesin artıyor ve başka bir aralıkta da kesin azalıyorsa monoton olmayan fonksiyon denir.

Monoton olmayan fonksiyonlar birden fazla argümanı için aynı değere sahip olabilir. Örneğin monoton olmayan $y=x^2$ formundaki bir fonksiyonun değeri hem $x=-3$ hem de $x=3$ için 9'dur. Ancak kesin monoton fonksiyonlar herhangi bir argümana sadece bir değer atar. Bu nedenle kesin monoton fonksiyonlar birebir fonksiyonlardır.

Birebir Fonksiyon

$f : X \rightarrow Y$, x'ten y'ye giden bir fonksiyon olsun. Eğer her x_1, $x_2 \in X$ için $f(x_1)=f(x_2)$ eşitliği $x_1=x_2$ eşitliğini gerektiriyorsa, yani X'in iki değişik elemanı, Y'nin aynı elemanına gidemiyorsa o zaman f fonksiyonuna birebir fonksiyon adı verilir.

Ters Fonksiyon

Herhangi bir birebir fonksiyonun tersi alınabilir. $y=f(x)$ fonksiyonunun tersi $y=f^{-1}(x)$ şeklinde gösterilir. Fonksiyonun tersini bulmak için önce x'i y cinsinden ifade ederiz, sonra da x'lerle y'leri yer değiştiririz. Örneğin $y=f(x)=3+6x$ fonksiyonunun tersini bulmak için önce x'i y cinsinden çözeriz.

$$6x = y - 3$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}y$$

Sonra da x'leri ve y'leri yer değiştirerek ters fonksiyona ulaşırız.

$$y = f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}x$$

DİKKAT

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

Minimum ve Maksimum Noktalar

İktisadi analizde bir fonksiyonun minimum ya da maksimum değerlerini belirlemek çok önemlidir. Örneğin bir tekelci firmanın kârı maksimize etmek için hangi fiyatı belirlemesi gerektiğine ya da bir üreticinin maliyeti minimize etmek için emek ve sermaye girdilerinden ne kadar kullanması gerektiğine karar verebiliriz.

Yerel maksimum ve yerel minimum kavramları bir noktanın civarındaki fonksiyon değerlerinin davranışı ile ilgili kavramlardır. Yerel maksimum noktasındaki fonksiyon değeri o noktaya yakın noktalardaki fonksiyon değerlerinden daima büyük, yerel minimum noktasındaki fonksiyon değeri de o noktaya yakın noktalardaki fonksiyon değerinden daima küçüktür. Kısaca fonksiyonun belli bir aralıktaki en yüksek değerine yerel maksimum, en düşük değerine de yerel minimum denir. Bir fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum noktaları, fonksiyonun extremum noktalarıdır.

Ortalama Değişim Oranı

$y=f(x)$ fonksiyonunun $[x_1, y_1]$ kapalı aralığında oartalama değişim oranı şöyle hesaplanır.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Örneğin daha önce harcanabilir gelirin bir fonksiyonu olarak belirlediğimiz $C=C(Y_d)=200+0,7Y_d$ şeklindeki tüketim fonksiyonumuzu ele alalım. Bu fonksiyonun [1000, 4000] kapalı aralığında ortalama değişim oranını hesaplayabilmek için öncelikle harcanabilir gelirin 1000 ve 4000 olduğu durumlarda fonksiyonun değerini hesaplamamız gerekir.

Bu amaçla $C(1000)=900$ ve $C(4000)=3000$ değerlerini hesaplarız. Bulduğumuz değerleri de formülde yerine koyarsak

$$\frac{\Delta C}{\Delta Y_d}=\frac{C(4000)-C(1000)}{4000-1000}=\frac{3000-900}{3000}=0,7$$

y=f(x)=ax+b formundaki doğrusal fonksiyonun sıfırdan farklı bir aralık için ortalama değişim oranı fonksiyonun eğimi olan *a* 'ya eşittir.

Doğrusal bir fonksiyonda ortalama değişim oranı sabittir ve fonksiyonun eğimine eşittir. Doğrusal olmayan bir fonksiyonun ortalama değişim oranı ise sabit değildir. Değişim oranının hesaplandığı aralığa bağlı olarak değişir.

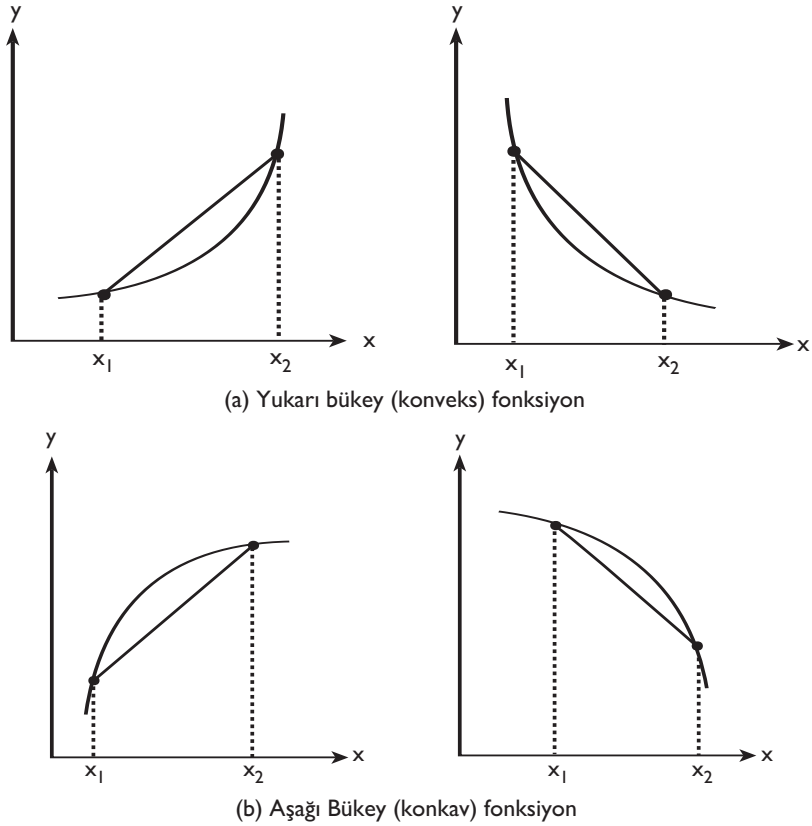
Bükeylik

İktisatta önemli konulardan bir tanesi de azalan marjinal fayda konusudur. Örneğin çok aç olduğunuz bir zamanda yediğiniz ilk dilim pizzanın faydası ile dördüncü dilim pizzanın faydası farklı olacaktır. Pizza yemeyi sürdürdüğümüz zaman fayda artacak ancak azalarak artacaktır. Dolayısıyla böyle bir gerçeği yansıtan fayda fonksiyonunu doğrusal bir fonksiyonla gösteremeyiz. Çünkü doğrusal fonksiyonda eğim sabit olduğundan yediğiniz her dilim pizzanın faydası eşit olacaktır. Bu nedenle fayda fonksiyonları bükümlü olarak çizilerek y ekseninde faydaya, x ekseninde de kullandığımız ya da tükettiğimiz maddeye yer verilir.

Tek değişkenli bir fonksiyonun bükeyliği, grafiği üzerinde iki noktasını birleştiren kirişin durumuna göre belirlenir. Yukarı ve aşağı bükey fonksiyonların grafikleri şekil 2.4'te gösterilmiştir.

Şekil 2.4

Yukarı Bükey ve Aşağı Bükey Fonksiyonlar



(a) Yukarı bükey (konveks) fonksiyon

(b) Aşağı Bükey (konkav) fonksiyon

Eğer fonksiyonun grafiği üzerinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren kiriş daima grafiğin üzerinde kalıyorsa *f* fonksiyonuna yukarı bükey veya konveks fonksiyon, eğer kiriş daima grafiğin altında kalıyorsa *f* fonksiyonuna aşağı bükey veya konkav fonksiyon denir. Bir fonksiyon belli bir aralıkta yukarı bükey, başka bir aralıkta aşağı bükey de olabilir. Bir fonksiyonun bükeyliğinin değiştiği noktaya büküm noktası denir.

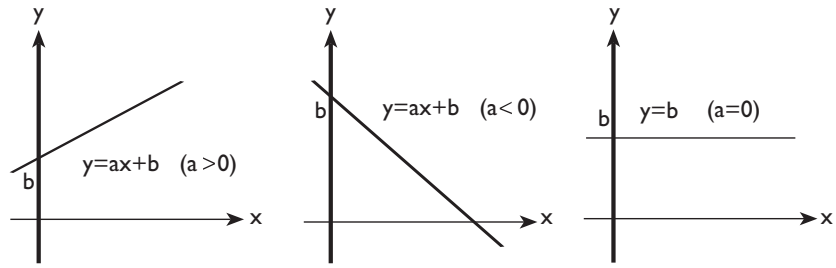
DOĞRUSAL FONKSİYONLAR

Doğrusal fonksiyonlarla iktisatta çok sık karşılaşırız. $y = f(x) = ax+b$ biçimindeki bir fonksiyon doğrusal fonksiyon olarak tanımlanır. Bu fonksiyonun kartezyen düzlemindeki garfiği de düz bir doğru şeklinde olur. x için herhangi bir değer alırsak:

$f(x+1) - f(x) = a(x+1)+b - ax - b = a$ 'dır. Buna göre a parametresi, x 'teki 1 birimlik değişim sonrasında fonksiyonun değerindeki değişimi ölçer. Bu nedenle a, doğrunun ve fonksiyonun eğimini verir. Eğer a pozitif ise, doğru sağa yukarı yöne meyilli olur. a'nın değeri arttıkça doğru da dikleşir. Ancak a negatif ise doğru sağa aşağı yönde çizilecektir. $a=0$ olması durumunda ise tüm x değerleri için $y=ax+b=b$ olacağından doğru x eksenine paralel olur. Bu üç farklı duruma göre çizilen fonksiyon grafikleri şekil 2.5'te gösterilmektedir. Doğrunun y eksenini kestiği noktaya y kesişimi adı verilir. $x=0$ olması durumunda $y=b$ olduğundan, b kısaca y kesişimi ya da kesişme terimi olarak adlandırılır.

Şekil 2.5

Doğrusal Fonksiyon Grafikleri



SIRA SİZDE 1

1998-2010 dönemi için tahmin edilen aşağıdaki elma talebi fonksiyonunda eğimi hesaplayarak yorumlayınız. Eşitlikte p fiyatı, q ise kişi başına talep edilen elma miktarını göstermektedir. $q=-0{,}26p+0{,}57$

Doğrusal Fonksiyonun Eğimi

Tek değişkenli doğrusal bir fonksiyonunun eğimi fonksiyonun argümanındaki belli bir değişime karşılık değerindeki değişimi ifade eder. x_1 ve $x_2 (x_1 \neq x_2)$ gibi herhangi iki noktası belirlenen $y=ax+b$ biçimindeki doğrusal fonksiyonda eğim

$$\left[\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right] = \left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right] = \frac{(ax_2+b)-(ax_1+b)}{x_2-x_1} = a$$ formülü ile hesaplanır.

Burada $f(x_2) - f(x_1)$ fonksiyonun değerindeki değişimi, $x_2 - x_1$ ise fonksiyonun argümanındaki değişimi göstermektedir. Elde edilen sonuca göre doğrusal bir fonksiyonun eğimi sabittir ve a parametresine eşittir.

Nokta-Eğim Formülü

Üzerindeki herhangi bir noktanın koordinatları ve eğimi bilinen bir doğrunun fonksiyonel biçimi rahatlıkla belirlenebilir. (x_1, y_1) noktalarından geçen ve eğimi a olan doğrunun denklemi

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

formülü ile hesaplanır. Burada (x_1, y_1) doğru üzerinde bilinen bir noktanın koordinatlarıdır. x ve y ise doğru üzerindeki herhangi bir noktanın koordinatlarını temsil eden değişkenlerdir.

Nokta-Nokta Formülü

$x_1 \neq x_2$ olmak koşulu ile (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarından geçen bir doğrunun denklemini elde etmek için:

- Doğrunun eğimi $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ formülü ile hesaplanır.
- Eğim için bulunan değer nokta-eğim formülünde yerine koyulur. $y - y_1 = a(x - x_1)$ Burada a yerine onu oluşturan ifade koyulursa

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Bir malın talebinin fiyatın doğrusal bir fonksiyonu olduğunu varsayalım. Fiyat (P) 10 iken talep edilen miktar (Q) 200 birim ise ve fiyat 15'e çıktığında talep edilen miktar 150 birime düşüyorsa doğrusal talep fonksiyonunu belirleyeniz.

SIRA SİZDE 2

Doğrusal Fonksiyonların İktisadi Uygulamaları

Tüketim Fonksiyonu: Keynesyen makroekonomik teoride, mal ve hizmetlere yapılan toplam tüketim harcamaları (C), harcanabilir gelirin (Y_d) bir fonksiyonudur.

$$C = f(Y_d)$$

Tüketim fonksiyonunun doğrusal olduğu varsayılırsa

$$C = a + bY_d$$

şeklinde ifade edilir. Burada eğimi ifade eden b, iktisatta marjinal tüketim eğilimi olarak adlandırılır. Harcanabilir gelirin ve tüketimin milyon ₺ olarak ölçüldüğünü düşünürsek marjinal tüketim eğilimi, harcanabilir gelirdeki ₺1 milyon'lik artış sonucunda tüketimin kaç milyon ₺ artacağını gösterir. Marjinal tüketim eğilimi 0 ile 1 arasında bir değer alır. Bunun anlamı harcanabilir gelir ile tüketim arasında pozitif bir ilişkinin olduğu, yani harcanabilir gelir arttığında tüketimin de artacağı ancak tüketimdeki artışın, gelirdeki artış kadar olmayacağıdır. Fonksiyonun kesişme terimi olan a ise iktisatta otonom harcamalar olarak adlandırılır. Bu da gelirin olmaması ya da sıfıra eşit olması durumunda yapılacak tüketim harcamalarının düzeyini temsil eder.

Türkiye ekonomisine ait makro tüketim fonksiyonu 1998'in 1. çeyreği ile 2011'in 2. çeyreği arasındaki veriler kullanılarak aşağıdaki gibi tahmin edilmiştir.

$$C = 860851{,}9 + 0{,}69\,Y_d$$

Burada marjinal tüketim eğilimi 0,69 olarak belirlenmiştir. Yani gelirdeki 1 birimlik artış sonucunda tüketim harcamaları 0,69 birim artmaktadır.

Arz ve Talep Fonksiyonları

Bir malın talep edilen miktarı piyasa fiyatına bağlıdır. Bu ilişkiyi $Q=f(P)$ şeklinde gösterip talep fonksiyonu olarak adlandırırız. Herhangi bir mal için talep fonksiyonu türetildikten sonra grafiğini de rahatlıkla çizebiliriz. Ancak burada matematikçilerle iktisatçılar arasında bir ayrım söz konusudur. Matematikçiler, miktarı (Q) düşey eksende ve fiyatı (P) yatay eksende gösterirler. İktisatta ise her ne kadar teoride talep edilen miktarın fiyatın bir fonksiyonu olduğu söylense de uygulamada öncelikle $P=g(Q)$ şeklindeki ters talep fonksiyonu türetilip daha sonra grafikte fiyat düşey eksende, miktar ise yatay eksende gösterilir. Bu 19. Yüzyılın sonlarında İngiliz İktisatçı Alfred Marshall'ın çalışmalarından sonra iktisatta standart uygulama haline gelmiştir.

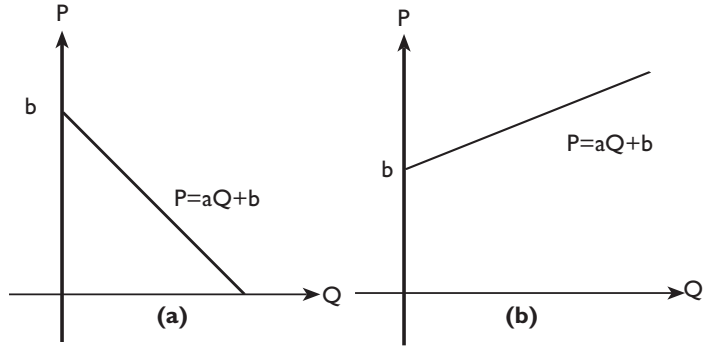
$P=q(Q)$ şeklindeki bir talep fonksiyonundan sadece fiyatın miktarın bir fonksiyonu olduğunu öğreniriz fakat bu iki değişken arasındaki ilişkinin yönü hakkında bir bilgi elde edemeyiz. Bunun için iktisat teorisi ve ampirik analiz yardımı ile belirlenecek fonksiyonu bilmemiz gerekir. Fonksiyonun doğrusal olduğunu varsayarsak

$P=g(Q)+b$ şeklinde ifade edebiliriz. Gerçekte fiyat ve miktar arasındaki ilşkiler çok daha karmaşık olabilir. Ancak gerçek ilişki hakkında bir ön bilgi vermesi ve matematiksel işlemlerin kolaylığı açısından doğrusal fonksiyon tercih edilmektedir. Sonuçta iktisadi modeller bir iktisadi sorunun temel özelliklerini ortaya koymamıza yardımcı olacak ve üzerinde rahatlıkla değişiklikler yapabileceğimiz, gerçeğin bir soyutlamasıdır. Kaçınılmaz olarak modelin gerçekçiliği ile matematiksel kolaylığı arasında bir tezat söz konusudur. Model gerçeğe yaklaştıkça kullanılan matematiğin karmaşıklığı da artmaktadır.

Tipik bir doğrusal talep fonksiyonu Şekil 2.6'nın a bölümünde gösterilmektedir. İktisat teorisine göre, fiyat arttığı zaman, talep edilen miktar düşer, yani doğrunun eğimi negatiftir. Matematiksel olarak fiyat miktarın azalan bir fonksiyonudur. Şekil 2.6'nın a bölümünde görüldüğü gibi $a < 0$ ve $b > 0$ dır.

Şekil 2.6

Talep ve Arz Fonksiyonları



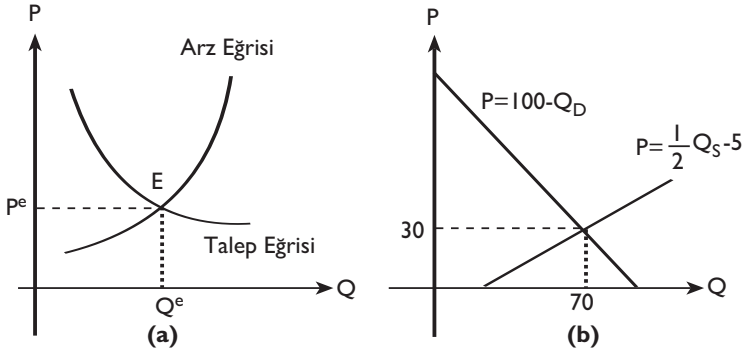
Aynı zamanda üreticilerin belli bir zamanda arz etmek istedikleri miktar malın fiyatına bağlıdır. Tipik bir doğrusal arz fonksiyonunun grafiği Şekil 2.6'nın b bölümünde gösterilmektedir. İktisat teorisine göre fiyat artarsa arz edilen miktar da artar. Matematiksel olarak fiyat miktarın artan bir fonksiyonudur. Fiyattaki artış, mevcut firmaları üretimlerini arttırmaya ve yeni firmaları piyasaya girmeye teşvik eder. $P=a(Q)+b$ şeklinde gösterilen arz fonksiyonunda eğim $a > 0$ ve kesişme terimi $b > 0$ olur.

Piyasa Dengesi

Arz ve talebin birbirine eşit oldukları yerde piyasa dengesi sağlanmış olur. Bu da arz ve talep eğrilerinin kesiştikleri yerde gerçekleşir. Bu noktada arz edilen miktar tam olarak talep edilen miktara eşittir. Bu durumda ortaya çıkan fiyata denge fiyatı (P^e) ve miktara, denge miktarı (Q^e) adı verilmektedir. Arz ve talep eğrileri ile piyasa dengesi Şekil 2.7'de gösterilmektedir. Arz ve talep fonksiyonlarının grafikleri doğrusal olabileceği gibi, fonksiyonun yapısına bağlı olarak şekil 2.7'nin a bölümünde olduğu gibi eğrisel de olabilir.

Şekil 2.7

Piyasa Dengesi



$Q_D=100-P$ şeklindeki talep fonksiyonunu ve $Q_S=10+2P$ şeklindeki arz fonksiyonunu ele alalım. Fiyatı eşitliğin sol tarafında yalnız bırakırsak ters talep fonksiyonu $P=100-Q_D$ ve ters arz fonksiyonu $P=\frac{1}{2}Q_s-5$ şeklinde olur. Dengede talep edilen miktar arz edilen miktara eşittir ($Q_D=Q_S$). Dolayısıyla $100-P=10+2P$ ve $3P=90$ bulunur. Buradan denge fiyatı $P^e=30$ olarak belirlenir. Bunu arz veya talep eşitliklerinden herhangi birisinde yerine koyarak denge miktarını $Q^e=70$ olarak hesaplarız.

Piyasa dengesini geometrik ya da cebirsel yöntemler kullanarak belirleyebileceğimiz gibi, farklı fonksiyonlar için kullanabilecepimiz genel bir formül de türetebiliriz. Denge fiyatı ve denge miktarının hesaplanmasında kullanabileceğimiz genel formülü türetmek amacıyla ters talep fonksiyonunun $P=a-bQ_D$ ve ters arz fonksiyonunun $P=c+dQ_S$ biçiminde olduğunu varsayalım. Dengede $a-bQ=c+dQ$ olur. Buradan $a-c=(b+d)Q$ ve $Q^e=\frac{a-c}{b+d}$ dir.

Denge miktarını hesaplamak için kullanacağımız bu formülü talep eşitliğinde yerine koyarak denge fiyatının hesaplanması için gerekli formülü türetebiliriz.

$$P^e=a-b\left[\frac{a-c}{b+d}\right]=a-\frac{b(a-c)}{b+d}=\frac{a(b+d)-b(a-c)}{b+d}$$
$$=\frac{ab+ad-ab+bc}{b+d}=\frac{ad+bc}{b+d}$$

Elde ettiğimiz bu genel formülleri herhangi bir doğrusal arz-talep fonksiyonuna uyarlayarak denge miktarını ve fiyatını kısa yoldan hesaplayabiliriz.

Talebin fiyat esnekliği, fiyattaki değişimlere talebin duyarlılığını ölçer. ε<1 ise talep esnek değil, ε=1 ise birim esnek, ε>1 ise talep esnek denir.

Esneklik

Firmalar için önemli olan fiyat değiştiği zaman toplam hasılanın bundan nasıl etkileneceğini bilmektir. Negatif eğimli bir talep eğrisinde fiyat düştüğü zaman talep edilen miktar artar. $TR = PQ$ olduğundan ve birbirine zıt yönde hareket eden ($P \Downarrow$ Q $\Uparrow$) iki değerin çarpılması ile elde edildiğinden, bundan toplam hasılanın nasıl etkileneceği talep ve miktardaki yüzde değişimlere bağlıdır. Miktardaki % değişme, fiyattaki yüzde değişmeden fazla ise firmanın toplam hasılası artar. Bu durumda talebin fiyat değişimlerine duyarlılığının fazla olduğunu ya da kısaca talebin esnek olduğunu söyleriz. Miktardaki yüzde değişimin, fiyattaki yüzde değişimden az olması durumunda ise talep fiyat değişimlerine nispeten duyarlı değildir ve talep esnek değildir. Bu durumda firma ürünün fiyatını arttırarak toplam hasılasını arttırabilir. Fiyat ve miktardaki yüzde değişimlerin birbirine eşit olması durumunda ise toplam hasıla değişmez. Bu durumu ifade etmek için ise birim esnek kavramı kullanılır.

Talebin fiyat esnekliği $\varepsilon_d = -\dfrac{\textit{talep edilen miktardaki \% değişim}}{\textit{fiyattaki \% değişim}}$ formülü ile hesaplanır.

$$\varepsilon_d = -\frac{\%\Delta Q_d}{\%\Delta P} = -\frac{\dfrac{\Delta Q}{Q}\times 100}{\dfrac{\Delta P}{P}\times 100} \qquad \varepsilon_d = -\frac{\Delta Q}{\Delta P}\times\frac{P}{Q}$$

Talep eğrisi negatif eğimli olduğundan fiyattaki pozitif değişim, miktardaki negatif değişime neden olur. Dolayısıyla esneklik değeri her zaman negatif olur. Formülün önündeki (-) işareti ise esneklik değerini pozitif hesaplamamızı sağlayan bir yöntemdir.

Talebin fiyat esnekliğinin hesaplanmasında kullanılan iki yaklaşım vardır. Bunlar nokta esnekliği ve yay esnekliğidir.

Yay Esnekliği

Yay esnekliği fonksiyon üzerindeki bir aralıkta esnekliği ölçer. Esnekliğin hesaplanmasında aralığın başlangıç ve bitiş noktalarındaki fiyat ve miktarların ortalamaları kullanılmaktadır.

$$\varepsilon_d = -\frac{\Delta Q}{\Delta P}\times\frac{\frac{1}{2}[P_1+P_2]}{\frac{1}{2}[Q_1+Q_2]} = -\frac{\Delta Q}{\Delta P}\times\frac{P_1+P_2}{Q_1+Q_2}$$

SIRA SİZDE 3

Talep fonksiyonu ise fiyatın 210'dan 200'e düşmesi durumuda yay esnekliğinin değerini hesaplayınız.

Nokta Esnekliği

Esneklik değeri belli bir aralıkta değil, bir noktada da hesaplanabilir. Yay esnekliği formülündeki ΔQ/ΔP oranı talep eğrisi üzerindeki iki noktayı birleştiren kirişin eğimidir. Bu iki nokta birbirine yaklaştıkça, yani ΔQ ve ΔP ve sıfıra yaklaştıkça, yay bir noktaya dönüşür ve kirişin eğimi o noktada çizilen teğetin eğimine yaklaşır.

Kısaca $\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta P} = \dfrac{dQ}{dP}$ olur. Bundan yararlanarak nokta esnekliği formülünü belirleyebiliriz.

$$\varepsilon_d = -\frac{P}{Q} \times \frac{dQ}{dP}$$

İktisatta genellikle talep eşitlikleri fiyatı miktarın bir fonksiyonu olarak $P=f(Q)$ biçiminde verir. Fakat nokta esnekliği formülünde kullandığımız $\frac{dQ}{dP}$ türevi için miktarı fiyatın fonksiyonu olarak ifade etmemiz gerekir.

$a < 0$ ve $b > 0$ koşulunu sağlayan $P= aQ+b$ şeklinde doğrusal bir talep fonksiyonu alalım. Öncelikle miktarı fiyatın bir fonksiyonu olarak ifade edersek

$aQ=P-b$ $Q = \frac{1}{a}(P-b)$ olur. Bu fonksiyonda $\frac{dQ}{dP} = \frac{1}{a}$ dır.

Talebin fiyat esnekliği formülünde Q yerine $(1/a)$ $(P-b)$ ve dQ/dP yerine $1/a$ yazarsak

$$\varepsilon = -\frac{P}{(1/a)(P-b)} \times \frac{1}{a} = \frac{-P}{P-b}$$

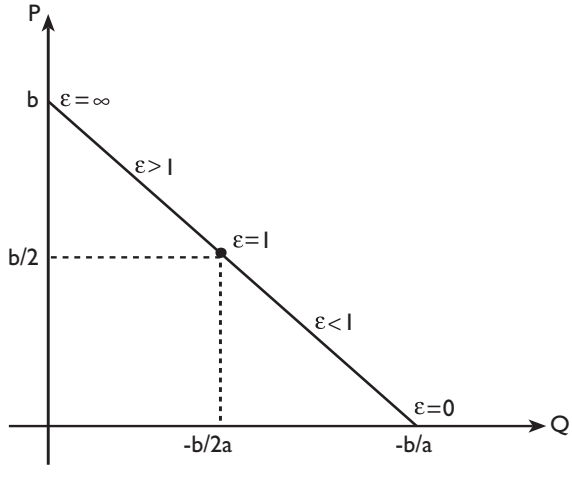
$\varepsilon = \frac{P}{b-P}$ bulunur.

Esnekliği hesaplamakta kullanacağımız bu formülde a yer almaz. Yani esneklik doğrusal talep fonksiyonlarının eğimlerinden bağımsızdır.

Doğrusal bir talep eğrisi boyunca esneklik farklı değerler alır. Bu şekil 2.8'de gösterilmektedir.

Şekil 2.8

Doğrusal Talep Eğrisi Boyunca Esneklik Değerleri



Talep fonksiyonunun $P=aQ+b$ olduğu hatırlanırsa grafiğin düşey ekseni kestiği noktayı bulmak için $Q=0$ dersek buradan $P=b$ bulunur. Bu noktadaki esneklik değeri ise $\varepsilon = \frac{b}{b-b} = \frac{b}{0} = \infty$ dur. Grafiğin yatay ekseni kestiği noktada $P=0$ dır. Bu noktadaki esneklik değeri ise $\varepsilon = \frac{0}{b-0} = \frac{0}{b} = 0$ olur. Talep eğrisi boyunca sol yukarıdan sağ aşağıya doğru hareket edildikçe esneklik ∞ ile 0 arasında değerler almaktadır. ε=1 olduğunda talebin birim esnek olduğunu belirtmiştik. Talebin birim esnek olması durumda fiyatı da rahatlıkla belirleyebiliriz.

$\frac{P}{b-P} = 1$ $P=b-P$ $2P=b$ $P=b/2$

Fiyat için bulduğumuz bu değeri dönüştürülmüş talep fonksiyonunda yerine koyarsak ε=1 durumundaki miktarı buluruz.

$$Q = \frac{1}{a}\left(\frac{b}{2} - b\right) = -\frac{b}{2a}$$

Talep eğrisinin tam orta noktasında talep birim esnektir. Bu noktanın solunda ε>1 olduğundan talep esnektir. Bu noktanın sağında ise ε<1 olduğundan talep esnek değildir.

SIRA SİZDE 4

Talep fonksiyonu Q=4P=60 olarak verilmişse, Talebin birim esnek olduğu durumda fiyat ne kadardır?

KARESEL (KUADRATİK) FONKSİYONLAR

İktisatta kullanılan tüm fonksiyonlar doğrusal değildir. Arz ve talep fonksiyonlarının doğrusal olduğunu varsayarak matematiksel analizi daha kolay hâle getirebiliriz ancak bu gerçekçilikten uzaklaşmamıza neden olur. Arz ve talep fonksiyonlarının grafikleri eğrisel olabilir ve bu fonksiyonları belirlemek için daha karmaşık fonksiyonel ilişkilere ihtiyaç duyabiliriz. Arz ve talep haricinde de iktisadi ilişkilerin çoğunda fonksiyon grafikleri ya önce azalıp bir noktada minimum yaptıktan sonra tekrar artar; ya da önce artıp bir noktada maksimum yaptıktan sonra azalmaya başlar. Bu tür doğrusal olmayan ilişkileri ifade etmek üzere karesel fonksiyonları kullanabiliriz. Doğrusal olmayan fonksiyonların en basit biçimi karesel fonksiyonlardır.

Karesel Fonksiyonların Çözümü

a, b, c sabit sayılar ve a≠ 0 olmak üzere, *f(x)* fonksiyonu ancak ve ancak $f(x)=ax^2+bx+c$ biçiminde yazılabiliyorsa, *f* fonksiyonu bir karesel fonksiyondur.

Karesel fonksiyonun çözümü $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ formülü ile bulunur. Burada çözümle ilgili üç farklı durumla karşılaşabiliriz. Karesel fonksiyonun ya iki çözümü vardır, ya tek çözümü vardır, ya da çözümü yoktur. Çözüm sayısı formülde karekök içindeki ifadenin ($b^2 - 4ac$) pozitif, sıfır ya da negatif olması ile ilgilidir.

- $b^2 - 4ac > 0$ ise iki çözüm vardır. Bunlar:

  $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ile bulunur.}$$

- $b^2 - 4ac = 0$ ise tek çözüm vardır.

  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

- $b^2 - 4ac < 0$ ise çözüm yoktur çünkü negatif bir ifadenin karekökü bulunamaz.

SIRA SİZDE 5

f(x) = –x² – 4x+12 fonksiyonunun çözümünü bulunuz.

Karesel bir fonksiyonun çözümünü bulmak için kullanılabilecek olan bir başka yöntem çarpanlara ayırmaktır. Örneğin

$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$ şeklinde çarpanlarına ayrılabilir. Dolayısıyla

$x^2+3x+2 = 0$ fonksiyonunun çözümünde $x+1=0$ ya da $x+2=0$ olur. Buradan fonksiyonun iki çözümü olduğunu belirleriz: $x_1 = -1$ $x_2 = -2$

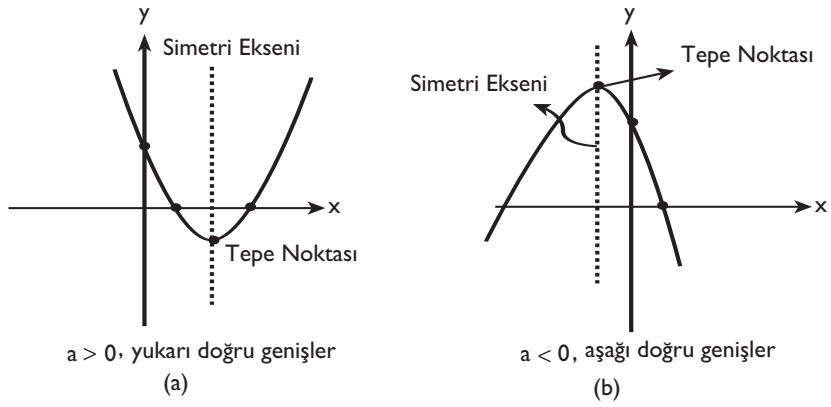
Ancak her zaman fonksiyonu kolayca çarpanlarına ayırabilecek kadar şanslı olmayabiliriz. Bu durumda çözüme ulaşmak için yukarıda verilen formül kullanılmalıdır.

Karesel Fonksiyonların Grafiği

$f(x)=ax^2+bx+c$ karesel fonksiyonunun grafiği parabol olarak adlandırılır. (iktisatta genellikle parabol yerine U şeklinde kavramı kullanılır) Eğer $a>0$ ise garfik yukarı doğru genişler. (şekil 2.9 a) Bu durumda parabolün yukarı doğru genişlediği söylenir. Kısaca grafik U şeklindedir. Eğer $a<0$ ise parabol aşağı doğru açılmaktadır. (Şekil 2.9 b) Kısaca grafik ters U şeklinde olur.

Şekil 2.9

Karesel fonksiyonun grafiği



Her parabol, simetri ekseni olarak adlandırılan dikey bir eksene göre simetriktir. Simetri ekseninin parabolü kestiği noktalar tepe noktalarıdır. $a>0$ ise parabol yukarı doğru genişler ve tepe noktası minimumu temsil eder. Yani fonksiyon bu noktada bir minimum değere sahiptir.

$f(x)=ax^2+bx+c$ fonksiyonunda $a>0$ ise $x=-\dfrac{b}{2a}$ olduğunda fonksiyon minimum değere sahiptir. (Şekil 2.9 a) x'in bu değerine karşılık gelen y koordinatı $x=f(-\dfrac{b}{2a})$' dır. Böylece tepe noktası $\left(-\dfrac{b}{2a}, f(-\dfrac{b}{2a})\right)$ olarak belirlenir.

$f(x)=ax^2+bx+c$ fonksiyonunda $a<0$ ise $x=-\dfrac{b}{2a}$ olduğunda fonksiyon maksimum değere sahiptir.(Şekil 2.9 b)

Parabolün x eksenini kestiği nokta ya da noktalar fonksiyonun çözümünden elde edilir. Parabolün y eksenini kestiği nokta (y kesişimi) ise x yerine sıfır koyularak hesaplanır. Buna göre y kesişeni c'ye eşittir.

Tepe noktasını, y kesişimini ve parabolün x eksenini kestiği nokta ya da noktaları belirledikten sonra karesel fonksiyonun grafiğini çizebiliriz.

$y=f(x)=ax^2+bx+c$ şeklindeki karesel fonksiyonun grafiği bir paraboldür.

DİKKAT

- Temel şekil belirlenir : $a>0$ ise parabol yukarı doğru genişler, $a<0$ ise aşağı doğru genişler
- Tepe noktası $\left(-\dfrac{b}{2a}, f(-\dfrac{b}{2a})\right)$ ile belirlenir.
- Parabolün y eksenini kestiği nokta c'dir.
- Parabolün x eksenini kestiği nokta (varsa) fonksiyonun çözümünden elde edilir.

Karesel Fonksiyonların İktisadi Uygulamaları

Arz ve Talep Fonksiyonları

Arz ve talep fonksiyonları doğrusal fonksiyonlarla olabildiği gibi, karesel fonksiyonlarla da gösterilebilir. Örneğin arz fonksiyonu $P=2Q_S^2+10Q_S+10$ fonksiyonu ile, talep fonksiyonu da $P=-Q_D^2-5Q_D+52$ fonksiyonu ile ifade edilmişken, denge fiyatını ve miktarını belirleyelim.

Dengede arz edilen miktar talep edilen miktara eşit olur ($Q_S=Q_D$). Denge miktarına Q dersek arz ve talep eşitliklerini

$$P=2Q^2-10Q+10$$

$$P=-Q^2-5Q+52$$

Şeklinde gösterebiliriz. Her iki fonksiyonda eşitliğin solunda P yer aldığından

$$2Q^2+10Q+10=-Q^2-5Q+52$$

Ortak terimleri bir araya toplarsak

$3Q^2+15Q-42=0$ eşitliğini elde ederiz. Sadeleştirmek için eşitliğin her iki tarafını üçe bölersek $Q^2+5Q-14=0$ eşitliğine ulaşırız. Bu da Q cinsinden karesel bir eşitliktir. Bu eşitliği çözerek denge miktarına ulaşabiliriz.

$$Q=\frac{-5\pm\sqrt{(5)^2-4(1)(-14)}}{2(1)}=\frac{-5\pm\sqrt{81}}{2}$$

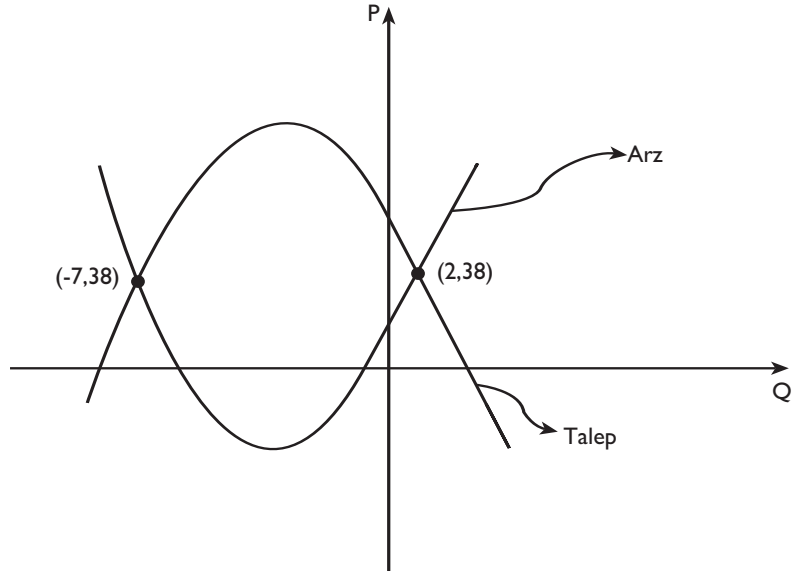
$$=\frac{-5\pm 9}{2}$$

$Q_1=-7$ ve $Q_2=2$ bulunur. Burada $Q_1=-7$ çözümü ihmal edilebilir çünkü negatif miktarın iktisadi açıdan bir anlamı yoktur. Dolayısıyla denge miktarı 2'dir. Denge fiyatı ise miktar için elde ettiğimiz değeri başlangıçtaki arz ve talep eşitliklerinden herhangi birisinde yerine koyarak hesaplanabilir. Arz eşitliğinde yerine koyarsak:

$P=2(2)^2+10(2)+10=38$ Denge fiyatı da 38 olarak belirlenir.

Şekil 2.10

Karesel Arz ve Talep Fonksiyonlarının Grafikleri



Burada matematiksel olarak iki çözüm bulunmasına rağmen biri iktisadi açıdan anlamlı olmadığından kullanılmamıştır. Fonksiyonların grafikleri ile denge çözümü şekil 2.10'da gösterilmektedir. Arz ve talep eşitliklerinin iki noktada kesiştikleri görülmektedir. Ancak iktisatta fiyat ve miktar pozitif olmalıdır. Bu nedenle fonksiyonlar kartezyen düzlemin sağ üst köşesinde yer alan birinci çeyrek bölgede tanımlanır. Örneğimizde bu bölgede yer alan sadece bir kesişme noktası vardır. O da (2,38) noktasıdır.

Hasıla, Maliyet ve Kar Fonksiyonları

Farklı amaçları da olabilmesine rağmen bir firmanın en temel amacı kârını maksimize etmektir. Kâr yunan alfabesinden π harfi ile gösterilir ve tanım olarak toplam hasıla ile toplam maliyet arasındaki farka eşittir.

$\pi = TR - TC$

Toplam hasıla bir firmanın, sattığı mallardan elde ettiği kazançtır. Toplam maliyet ise firmanın, malların üretimi için harcadığı para miktarıdır.

Bir firma Q miktarındaki malı, P fiyatından satarsa elde edeceği kazanç

$TR = PQ$ kadar olur.

Doğrusal bir talep fonksiyonumuz varsa

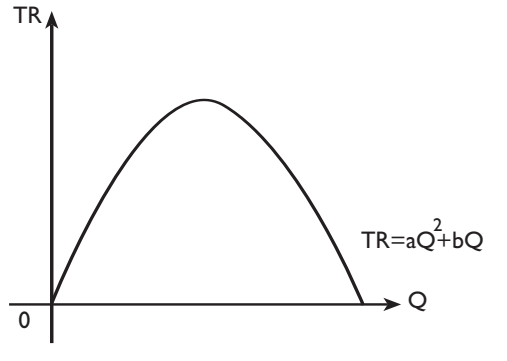
$P = aQ + b \quad (a<0,\ b>0)$ Toplam hasıla fonksiyonunu rahatlıkla belirleyebiliriz.

$$\begin{aligned} TR &= PQ \\ &= (aQ+b)Q \\ &= aQ^2 + bQ \end{aligned}$$

Bu karesel fonksiyonda $a < 0$ olduğundan TR fonksiyonunun grafiği ters U şeklinde olur. (Şekil 2.11) $c = 0$ olduğundan eğri düşey ekseni her zaman orijinde keser. Bu aslında beklenen bir durumdur. Çünkü fonksiyonun grafiğinde düşey ekseni kestiği noktayı $Q=0$ vererek buluruz. Yani hiç mal satılmazsa bunun sonucunda toplam hasıla da sıfır olur.

Şekil 2.11

Toplam Hasıla Fonksiyonu



Toplam maliyet fonksiyonu (TC) ise üretim maliyetlerini çıktının (Q) bir fonksiyonu olarak gösterir. Üretim miktarı arttığında, maliyetler de artacağından TC fonksiyonu artan bir fonksiyondur. Ancak kısa dönemde bu maliyetlerin bir kısmı sabittir. Sabit maliyetler (FC), toprak, makine teçhizat, bina gibi kısa dönemde değiştirilmesi zor olan maliyetleri içerir. Uzun dönemde ise tüm maliyetler değişkendir. Değişken maliyetler (VC) ise üretim düzeyi ile birlikte arttığından, hammadde, enerji, vasıfsız işçi maliyetleri gibi maliyet kalemlerini içerir. Eğer değişken maliyet çıktının birim maliyetini ifade ediyorsa, bu durumda Q birim malın üretimindeki toplam değişken maliyet (TVC)

$TVC = (VC)Q$ formülü ile hesaplanır.

Sabit ve değişken maliyetlerin toplamından oluşan toplam maliyet ise

$TC = FC + (VC)Q$ formülü ile bulunur. Eğer birim başına değişken maliyet sabitse, TC fonksiyonu doğrusal bir fonksiyon olur. Y kesişimi FC ile ve eğimi VC ile belirlenir.

SIRA SİZDE 6

Basitleştirilmiş varsayımlara göre toplam maliyet fonksiyonunu doğrusal olarak belirledik. Ancak Mikro iktisat derslerinizde kullandığınız toplam maliyet fonksiyonunun biçimi daha farklıdır. Bu farkın nedenleri nelerdir ve iktisat teorisine göre toplam maliyet fonksiyonunun biçimi nasıl olmalıdır?

Ekonomik açıdan her ne kadar bu fonksiyon önemli de olsa firmalar arasında karşılaştırma yapmak için yeterli değildir. Örneğin Uluslararası bir traktör firmasının biri Türkiye'de diğeri de Almanya'da olmak üzere iki üretim tesisi olduğunu varsayalım. Bu tesislerden Türkiye'de olanın yıllık toplam maliyeti ₺50 milyon, Almanya'da olanınki ise ₺200 milyon olsun. Türkiye'deki tesisin yıllık toplam maliyeti daha düşük olduğu için bunu daha verimli ya da daha başarılı olarak değerlendiremeyiz. Bu analizi yapabilmek için aynı zamanda her iki tesiste üretilen toplam traktör sayısını da bilmemiz gerekir. Dolayısıyla burada önemli olan toplam maliyet değil, traktör başına ortalama maliyettir. Eğer Almanya'daki fabrika yılda 100.000, Türkiye'deki fabrika yılda 20.000 tarktör üretiyorsa bu durumda ortalama maliyetler

$$AC_1 = \frac{200.000.000}{100.000} = 2000 \qquad AC_2 = \frac{50.000.000}{20.000} = 2500$$ olarak hesaplanır.

Bu durumda Almanya'daki tesisin ortalama maliyeti daha düşük olduğundan daha verimli çalıştığını söyleyebiliriz.

Genel olarak ortalama maliyet fonksiyonu (AC) toplam maliyet fonksiyonunu çıktıya bölerek elde edilir.

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{FC + (VC)Q}{Q} = \frac{FC}{Q} + \frac{(VC)\cancel{Q}}{\cancel{Q}}$$
$$= \frac{FC}{Q} + \mathrm{VC}$$

Örneğin sabit maliyetler 2000 ve değişken maliyetler birim başına 5 ise, TC ve AC fonksiyonlarını belirleyerek grafiklerini çizelim.

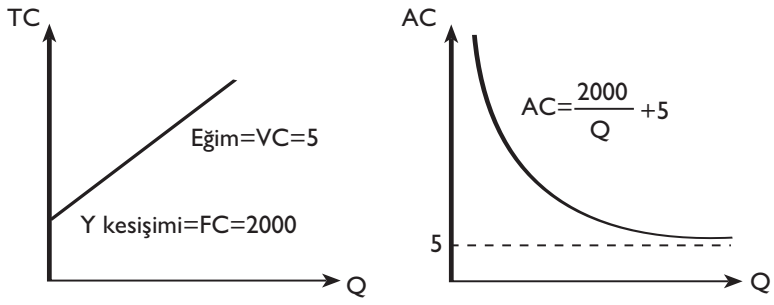
$TC = 2000 + 5Q$ olur. Buradan ortalama maliyet de

$$AC = \frac{2000}{Q} + 5$$ olarak belirlenir.

Toplam maliyet fonksiyonu doğrusal bir fonksiyon olduğundan grafiğinde y kesişimi sabit maliyete ve eğimi de değişken maliyete eşit olur. Ortalama maliyet fonksiyonunun grafiği ise L şeklinde olur.

Şekil 2.12

Toplam ve Ortalama Maliyet Fonksiyonları

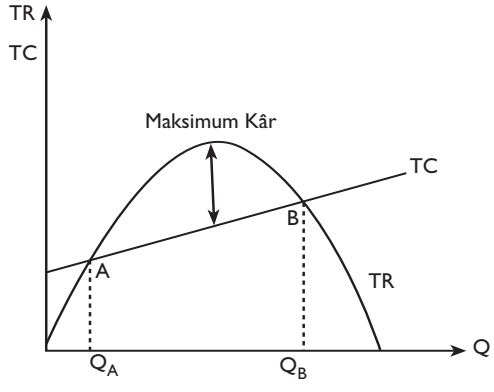


Eğer üretim düzeyi düşükse *FC/Q* değeri büyür. Bu nedenle *AC* grafiği düşük çıktı düzeylerinde hızla yukarı doğru yönelir. Üretim düzeyi arttığında ise *FC/Q* değeri azalacağından garifik aşağı doğru yönelerek düzleşir. Çünkü sabit maliyet çok sayıda birim üzerine bölünmektedir. Bu nedenle *AC* eğrisi *L* şeklindedir.

Toplam hasıla ve toplam maliyet fonksiyonlarını birlikte inceleyerek firmanın başabaş noktalarını bulup, kar ve zarar ettiği bölgeleri belirleyebiliriz.

Şekil 2.13

Toplam Hasıla ve Toplam Maliyet Fonksiyonları



Şekil 2.13'de TR ve TC fonksiyonlarının grafikleri birlikte gösterilmiştir. Bu grafikler talep fonksiyonunun doğrusal olduğu ve buna bağlı olarak TR fonksiyonunun karesel olduğu, birim başına değişken maliyetin sabit olduğu ve buna bağlı olarak da toplam maliyet fonksiyonunun doğrusal olduğu varsayımlarına göre oluşturulmuştur. Grafikte yatay eksende çıktı *Q* gösterilmektedir. Ancak çıktı bu iki fonksiyon için değişik anlam taşır. Hasıla fonksiyonu için *Q* satılan malların miktarını gösterir, maliyet fonksiyonu için ise üretim miktarıdır. Bu iki fonksiyonu aynı garfik üzerinde göstererek iki fonksiyon için *Q* değerinin birbirine eşit olduğunu, yani firmanın ürettiği tüm malları sattığını varsayıyoruz.

İki eğri A ve B noktalarında kesişmektedir ve bu iki noktadaki çıktı miktarları şekil 2.13'de Q_A ve Q_B olarak gösterilmiştir. Bu noktalarda maliyet ve hasıla birbirine eşit olduğundan firmanın başa baş noktalarıdır. Eğer $Q < Q_A$ veya $Q > Q_B$ ise *TC* eğrisi *TR'* nin üzerinde olduğundan maliyetler hasılayı aşmaktadır. Bu çıktı düzeylerinde firma zarar etmektedir. Eğer $Q_A < Q < Q_B$ ise hasıla maliyeti geçmekte ve firma kar etmektedir. Kar miktarı ise toplam hasıla ile toplam maliyet eğrileri arasında kalan düşey uzaklık ile belirlenir. Maksimum kar ise iki eğri arasındaki açıklığın en fazla olması durumunda gerçekleşir.

Örneğin bir malın talep fonksiyonu Q=65–5P olarak verilsin. Sabit maliyet 30 ve üretilen birim başına değişken maliyet 2 ise firmanın başa baş noktalarını ve maksimum kârını hesaplayalım.

Öncelikle ters talep fonksiyonunu bularak fiyatı çıktı cinsinden ifade etmeliyiz. Çünkü sonrasında ihtiyacımız olan toplam hasıla ve toplam maliyet fonksiyonları da çıktı cinsinden ifade edilir.

$$Q = 65 - 5P \qquad 5P = 65 - Q \qquad P = \frac{65 - Q}{5} = 13 - 0,2Q$$

Ters talep fonksiyonunu elde ettikten sonra Toplam hasıla fonksiyonunu bulabiliriz.

$TR=PQ$

$TR=(13–0,2Q)Q=13Q – 0,2Q^2$

Toplam maliyet fonksiyonu ise sabit maliyet ile değişken maliyetin toplamından oluşur.

$TC=FC+VC=30+2Q$

Firmanın kar fonksiyonu $\pi=TR–TC$ ile belirlenir.

$\pi=13Q–0,2Q^2–30–2Q$

$=–0,2Q^2+11Q–30$

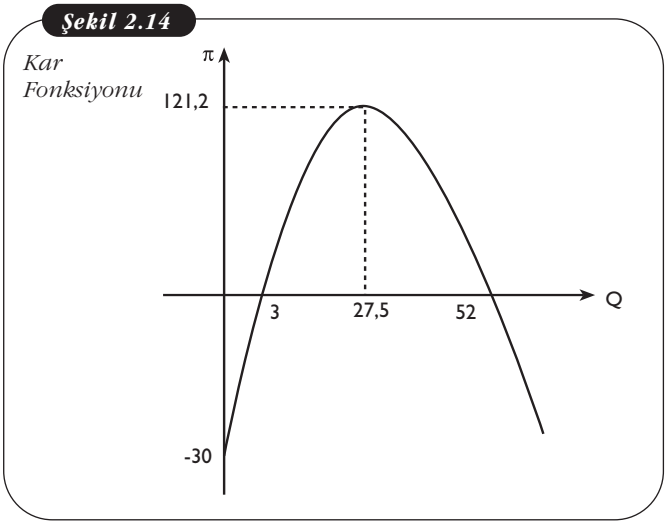
Bu fonksiyonu çözerek başabaş noktalarına ulaşabiliriz. Çünkü başa baş noktasında $TR=TC$ olduğundan π sıfıra eşittir.

a= –0,2 b=11 c= –30

$$Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-11 \pm \sqrt{(11)^2 - 4(-0,2)(-30)}}{2(-0,2)} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 24}}{-0,4}$$

$$Q = \frac{-11 \pm 9,8}{-0,4}$$ Q_1=52 ve Q_2=3 bulunur.

Şekil 2.14



Parabolun tepe noktasından geçen simetri ekseni parabolü eşit iki parçaya böler. Bu nedenle parabolun yatay ekseni kestiği noktaların simetri eksenine uzaklıkları eşittir. Yani parabolün tepe noktası 3 ile 52 noktalarının tam ortasıdır. Bu tepe noktası da kârın maksimize edildiği çıktı düzeyini verir.

$$Q = \frac{3 + 52}{2} = 27,5$$

SIRA SİZDE 7

π=-0,2Q^2+11Q-30 biçimindeki karesel kâr fonksiyonunda tepe noktasını belirlemekte daha önce kullandığımız formülü kullanarak, karı maksimize eden çıktı düzeyini ve maksimum kârı hesaplayınız.

Bu çıktı düzeyinde maksimum kârı hesaplayabilmek için bulunan değeri kâr fonksiyonunda yerine koyarız.

π_{max}= – 0,2 (27.5) 2 + 11 (27.5) – 30

= 121,2

Özet

AMAÇ 1

Fonksiyon kavramını ve fonksiyonla ilişkili diğer temel kavramları tanımlamak

Bir fonksiyonel ilişkide değişik değerler alabilen niceliklere değişken adı verilir. Bir değişkenin veri değerindeki değişme, başka bir değişkende bir değişmeye yol açıyorsa veri değişken diğer değişkenin bir fonksiyonudur ve aralarında fonksiyonel bir ilişki vardır. Kısaca bir fonksiyon, bir niceliğin (çıktı) başka bir niceliğe (girdi) ne şekilde bağlı olduğunu ifade eden özel bir ilişki türüdür. Bir kümenin elemanları, başka bir kümenin elemanları ile ilişki içerisinde olabilir. Bu ilişkinin bazı kurallar çerçevesinde oluşturulan özel bir biçimine de fonksiyon adı verilir. Bir kümenin her elemanı diğer kümenin tek bir elemanı ile eşleşiyorsa buna fonksiyon adı verilmektedir. Küme, sıralı ikili, bağıntı fonksiyon tanımını yaparken kullandığımız ilişkili kavramlardır. Her fonksiyonun bir bağıntı olması gerekir ancak her bağıntı bir fonksiyon olmayabilir. Belirlenen sıralı ikililer kullanılarak fonksiyonun grafiği çizilebilir.

AMAÇ 2

Fonksiyonların matematiksel özelliklerini açıklamak

Fonksiyonları grafikler kullanarak görsel olarak inceleyebileceğimiz gibi, matematiksel özelliklerini kullanarak iktisadi açıdan da yorumlayabiliriz. Bunun için fonksiyonların matematiksel özelliklerini bilmemiz gerekir. Bilmemiz gereken temel kavramlar arasında artan ve azalan fonksiyon, monoton, kesin monoton ve monoton olmayan fonksiyon, birebir fonksiyon, ters fonksiyon vardır. İktisadi analizde bir fonksiyonun minimum ya da maksimum değerlerini belirlemek çok önemlidir. Doğrusal fonksiyonun sıfırdan farklı bir aralık için ortalama değişim oranı fonksiyonun eğimine eşittir. Tek değişkenli bir fonksiyonun bükeyliği, grafiği üzerinde iki noktasını birleştiren kirişin durumuna göre belirlenir. İktisatta yukarı ve aşağı bükey fonksiyonlarla karşılaşırız.

AMAÇ 3

Doğrusal fonksiyonları tanımlayıp iktisattaki kullanım alanlarını örneklemek

Doğrusal fonksiyonlarla iktisatta çok sık karşılaşırız. $y=f(x)=ax+b$ biçimindeki bir fonksiyon doğrusal fonksiyon olarak tanımlanır. Bu fonksiyonun kartezyen düzlemindeki grafiği de düz bir doğru şeklinde olur. Tek değişkenli doğrusal bir fonksiyonunun eğimi fonksiyonun argümanındaki belli bir değişime karşılık değerindeki değişimi ifade eder. Üzerindeki herhangi bir noktanın koordinatları ve eğimi biliniyorsa ya da iki noktasının koordinatları biliniyorsa bir doğrunun denklemine ulaşılabilir. Doğrusal fonksiyonlar iktisatta Keynesyen tüketim fonksiyonunda, arz ve talep fonksiyonları ile piyasa dengesinin belirlenmesinde, talebin fiyat esnekliğinin hesaplanmasında kullanılabilir.

AMAÇ 4

Karesel fonksiyonların çözümünü yapıp iktisadi uygulamalarını göstermek

İktisadi ilişkilerin çoğunda fonksiyon grafikleri ya önce azalıp bir noktada minimum yaptıktan sonra tekrar artar ya da önce artıp bir noktada maksimum yaptıktan sonra azalmaya başlar. Bu tür doğrusal olmayan ilişkileri ifade etmek üzere karesel fonksiyonları kullanabiliriz. Doğrusal olmayan fonksiyonların en basit biçimi karesel fonksiyonlardır. Karesel fonksiyonun ya iki çözümü vardır, ya tek çözümü vardır, ya da çözümü yoktur. Çözüm sayısı b^2-$4ac$'nin pozitif, sıfır ya da negatif olması ile ilgilidir. Karesel fonksiyonunun grafiği parabol olarak adlandırılır. Ancak iktisatta genellikle parabol yerine U şeklinde kavramı kullanılır. Karesel fonksiyonlar iktisatta arz ve talep fonksiyonlarında ve piyasa dengesinin belirlenmesinde, hasıla, maliyet, kâr fonksiyonlarında ve bunlardan yararlanarak maksimum kar için üretim düzeyi ve fiyatın belirlenmesinde ve firmanın başa baş noktasının hesaplanmasında kullanılabilir.

3

Amaçlarımız

Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- Üstel ve logaritmik fonksiyonların temel özelliklerini açıklayabilecek ve uygulama alanında kullanabilecek,
- Bu tip fonksiyonların iktisat lisans eğitiminde hangi alanlarda, ne amaçla kullanıldığını tanımlayabilecek,
- Makro iktisat ve mikro iktisat alanlarında konuları anlayabilmek için bu fonksiyonları ve özelliklerini uygulamalarınızda kullanabilecek bilgi ve becerilere sahip olacaksınız.

Anahtar Kavramlar

- Üstel fonksiyon
- Doğal sayı
- Logaritmik fonksiyon
- Büyüme
- Bileşik faiz
- Doğal logaritma
- Üstel ve logaritmik türev kuralları
- Lojistik eğrisi
- Zaman
- Esneklikler
- Ters talep
- Toplam Hasıla
- Marjinal Hasıla

İçindekiler

Matematiksel İktisat → Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar →

- ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLARA GİRİŞ
- BİLEŞİK FAİZ VE e (DOĞAL SAYI) SAYISI
- İKTİSAT UYGULAMALARI

Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar

ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLARA GİRİŞ

Üstel fonksiyonlar ve bunların tersi olarak logaritmik fonksiyonlar ve bu tip fonksiyonların iktisat lisans eğitiminde nerede ve nasıl kullanıldığı bu ünitenin konuları olacaktır. Örneğin sabit büyüme oranlı her türlü büyüme işlemi üstsel fonksiyonlar ile tanımlanabilir. Nüfus artışı, yatırımlarda meydana gelen artış ve ya bir ülkenin GSYİH'sında meydana gelen büyüme, üstsel fonksiyon temelli açıklanabilir. Yalnızca bu basit örnekler bile bir iktisat öğrencisi üstel ve logaritmik fonksiyonları neden tanımalı ve anlamalı sorularının yanıtını oluşturabilir.

Öncelikle, basitçe şu ayrımı yapmalıyız. Kuvvet fonksiyonları ve üstel fonksiyonlar birbirinden farklı iki tip fonksiyondur. Şekil olarak benzerlik göstermeleri başlangıçta iktisat öğrencileri için şaşırtıcı olabilmektedir.

$f(x) = y = x^k$ genel şekliyle verilen basit kuvvet (güç) fonksiyonlarında, x taban ve k kuvvet (derece) olarak okunur. Tabanın pozitif ve üstün rasyonel sayı olması iktisat işlemleri için işlerimizi kolaylaştıracaktır. Burada x bir değişken iken, k bir sabittir. Bu durum üstel fonksiyonlarda değişecektir.

Örnekler:

$y = f(x) = x^2$

$$y = f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$y = f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$y = f(x) = x^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

Yukarıdaki dört örnekte rahatlıkla izlenebileceği gibi, y bağımlı değişkeni bir tek x bağımsız değişkeni ile açıklanmaktadır. x'in üstünde yer alan sayılar ise yukarıda açıkladığımız k sabitini oluşturmaktadır.

Üstel fonksiyonlara baktığımızda ise değişkenin tabanda değil üstte yer aldığı izlenir. Tek değişkenli üstel fonksiyonlarda bağımsız değişken tabanda değil üstte yer alacaktır.

Örnekler:

$x = g(y) = 3^y$

$$x = g(y) = \left(\frac{1}{3}\right)^y = 3^{-y}$$

$z = x^y$

Yukarıdaki üç örneğin ilk ikisinde x bağımlı, y bağımsız değişken iken; üçüncü fonksiyonda z bağımlı y ise bağımsız değişkendir. Kuvvet fonksiyonlarından çok açık farkları, fonksiyonlarda bağımsız değişkenlerin üstte yer almalarıdır.

Üstel fonksiyonların grafikleri incelendiğinde fonksiyonun konkavlığı hakkında basit bir kural geliştirilebileceği rahatlıkla izlenebilir. Şöyle ki, üstel fonksiyonlarda taban pozitif olduğu sürece fonksiyon her zaman konveks olacak ve fonksiyonun görüntü kümesi yalnızca pozitif sayılardan oluşacaktır.

Eğer taban 1'den büyük ise elimizde artan, yok eğer taban 0 ile 1 aralığında (0 ve 1 dahil değil) ise elimizde azalan bir fonksiyon var demektir.

DİKKAT

Taban ve üstlü sayıların yer aldığı şu basit cebirsel kuralları aklımızda tutmamız, üstel fonksiyonları çalışırken işimize yarayacaktır:

$a^{s+1} = a^s a^t$

$a^{st} = (a^s)^t$

$(ab)^s = a^s b^s$

BİLEŞİK FAİZ VE e (DOĞAL SAYI) SAYISI

Varsayalım ki $P_0 > 0$ (anapara) kadar paranızı vadeli mevduat hesabına yatırdınız ve bu hesap size r kadar sabit nominal yıllık faiz oranı önermektedir. Faiz ödemeleri yıl içerisinde düzenli aralıklarla n defa yapılmaktadır.

Bir yıl sonunda anaparanın yeni durumunu gösteren hesap şöyle olacaktır:

$$P_1 = P_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Peki, bankada paranızı bir yıl yerine t yıl tutuğunuzu varsayalım. Bu durumda hesabınızda olması gerekli P_t miktarında parayı gösteren bileşik faiz formülü şöyledir:

$$P_t = P_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Yukarıdaki formüllerde $\frac{r}{n}$ yıl içerisinde her dönem ödenen faiz oranını ve nt faiz ödemelerinin t yılda toplam kaç kez yapılacağını gösterir.

Burada önemli bir noktayı belirtmeden geçmeyelim. Yukarıda t yılda belirli aralıklarla anaparanın nasıl büyüyeceğine dair genel formül görmekteyiz. Bu formül yalnızca bankalara yatırılan paranın gelecekte alacağı değeri hesaplamakta kullanılmaz. İktisatta büyüme hesabı yapılan bütün alanlarda bu formülü ya da bu formülün değişik versiyonları kullanılmaktadır. Örneğin P fiyatlar genel seviyesini ifade ettiğinde formül gelecekte fiyatlar genel seviyesinin nasıl olabileceğine dair bilgiler sunacaktır. Bu durumda r enflasyon oranını ifade edecektir. Ya da yine mak-

ro iktisat alanından P'nin GSMH'yi temsil ettiğini düşünebiliriz. Bu durumda r büyüme oranını temsil edecektir. Görüldüğü gibi yukarıdaki formül iktisatta değişik alanlarda büyüme hesabı yapabilmek için kullanılabilmektedir.

Şimdi yukarıdaki büyüme formülünde biraz değişikliğe gidelim. Bu kez çok gerçekçi olmasa da faizin her an uygulandığını varsayalım. Bir başka ifadeyle faiz devamlı bir şekilde anaparaya işlemektedir. Bu hesabı yapabilmek için geliştirilecek formülde e sayısı yani doğal sayı kullanılacaktır.

e sayısı şöyle tanımlanır:

$$e = \exp(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Doğal sayı yardımıyla şimdi sürekli işleyen faizin anaparayı bir yıl sonunda ne kadar değiştireceğini hesaplayabiliriz:

$$\exp(r) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

$$\exp(r) = e^r$$

Yani bir yıl için yapılan büyüme formülünde artık $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ yerine e^r gelecek. Bunu formülde kullanmadan önce $exp\ (r) = e^r$ eşitliğinin nasıl sağlandığına bakalım:

$$\exp(r) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = \lim_{m\to\infty, n=rm}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{rm}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^r = \left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^r = e^r$$

Artık t yıl sonra anaparanın sürekli işleyen bir faiz hesabıyla ne hâle geleceğinin formülünü yazabiliriz:

$$P_t = P_0\, e^{rt}$$

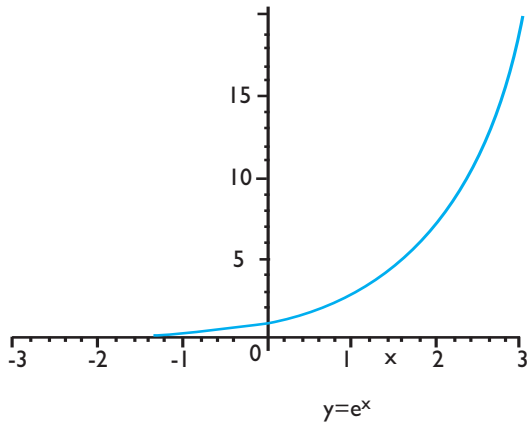
Aşağıda çeşitli n ve r verileri ile hesaplanmış $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ değerlerine ait örnek tabloyu görebilirsiniz:

Tablo 3.1
Örnek bileşik faiz tablosu

	r = %5,4	r = %5,5	r = %100
n = 4	1,055103375	1,056144809	2,44140625
n = 12	1,055356752	1,05640786	2,61303529
n = 364	1,055480375	1,056536225	2,714557303
n = 8736	1,055484426	1,056540432	2,718126265
n = 524160	1,055484599	1,056540612	2,718279235
n = 31449600	1,055484602	1,056540613	2,718281796
n →+ ∞	1,055484602	1,056540615	2,718281828

Şekil 3.1

$y = e^x$ fonksiyonunun grafiği



Şimdi doğal tabanlı üstel fonksiyonların en basit hali olan $y = e^x$ fonksiyonunun grafiği nasıl görünür, birlikte inceleyelim:

Şekil 3.1'den de anlaşılacağı gibi, e^x fonksiyonunun tanım kümesi bütün reel sayılar olabiliyor iken, görüntü kümesinde yalnızca pozitif sayılar yer alabilmektedir. Fonksiyon artan x değerleri ile birlikte artmaktadır ve tanım kümesinin bütün değerleri için çok açık biçimde sürekli konvekstir.

e tabanlı üstel fonksiyonların özellikleri

1. $e^0 = 1$;

2. $e^1 = e$;

3. $e^x > 0$, bütün x değerleri için;

4. $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$

Aslında, e^x sürekli artan ve konvekstir.

$\frac{dy}{dx}/y$ ifadesi, $y = f(x)$ fonksiyonuna göre x'te meydana gelebilecek küçük bir birimlik artışın y'de meydana getireceği yüzdesel büyüme oranını tanımlar. $\frac{dy}{dx}/y$ ifadesi, y fonksiyonunun ani büyüme oranı olarak kabul edilir.

$\frac{dy}{dx}/y$ ifadesi, x'e göre tanımlı y fonksiyonunun ani büyüme oranıdır.

5. Üstel ve polinomyal büyüme:
Herhangi bir $P(x)$ polinomu için:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{P(x)} = +\infty$$ şeklinde gerçekleşir.

$P(x)$ polinomu $P(x) \equiv 1$ sabit polinomu olarak ele alındığında:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$e^0 = 1$

$e^1 = e$

$e^x > 0$

$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$

6. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

7. $e^{a+b} = e^a e^b$ $\qquad (e^a)^b = e^{ab}$

Gerçekte $e^{-x} e^x = e^0 = 1$ olduğu için $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ şeklinde yazılır.

e^x değerini hesaplamakta en kestirme yol aşağıdaki formülü kullanmaktır:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Şimdi de $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ifadesinin doğruluğunu ortaya koyabilmek için yukarıdaki özelliklerden bazılarının yorumlamalarına bir göz atalım.

Üçüncü özellik şu sebeplerle doğruluk bulmaktadır:

$\left(1+\frac{x}{n}\right)$ faktörü x > 0 olduğu zaman veya n değeri $|x|$'e göre büyük olduğunda pozitif olmaktadır. Bu durumda $f_n(x) > 0$ ve dolayısıyla $e^x > 0$ doğru olur.

Dördüncü özelliğe ilişkin şu yorumu getirmeliyiz:

$\frac{df_n}{dx} = n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\frac{1}{n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \approx \left(1+\frac{x}{n}\right) = f_n(x)$ ifadesi $|x|$'e göre büyük n değerleri için doğrudur. Çünkü ancak bu durumda $\left(1+\frac{x}{n}\right)$ ifadesi 1'e çok yakın olabilmektedir.

Beşinci özelliğin yorumu ise şu şekildedir:

Varsayalım ki $P(x) = a_m x^{m-1} + \ldots$ polinomu m inci derecedendir. n değerinin m'den büyük olduğu kabulü ile e^x değerini $f_n(x)$ ile yakınsayalım. Bu durumda:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{P(x)} \approx \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{s}{n}\right)^n}{P(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^n x^n + \ldots}{a_m x^m + \ldots} = \lim_{x\to+\infty} Cx^{n-m} = +\infty$$

ifadesinin doğru olduğu görülmektedir.

Logaritmik Fonksiyon

Doğal logaritmik fonksiyon en temel şekliyle $x = \ln(y)$ şeklinde gösterilebilir ve

$y = e^x$ doğal tabanlı üstel fonksiyonunun tersidir. Bir başka ifadeyle:

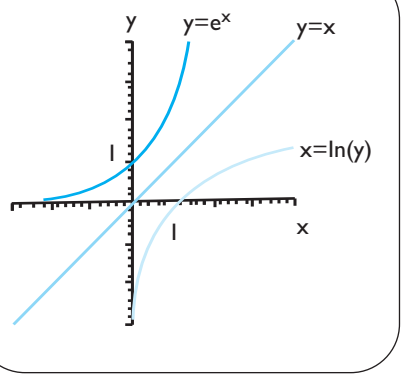
$x = \ln(y) \Leftrightarrow y = e^x$ ifadesi doğrudur.

Doğal logaritmik fonksiyonun grafiği basit olarak doğal tabanlı üstel fonksiyon grafiğinin $x = y$' de çizilecek 45 derecelik doğruya göre aynadaki yansıması gibidir:

Ters fonksiyonların türevinin alınması kuralı bize logaritmik fonksiyonun türevinin hesaplanmasında yardımcı olur:

$$\frac{d\ln(y)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

Şekil 3.2



ln(y) fonksiyonunun özellikleri

1. ln (y) fonksiyonu yalnızca y > 0 olduğu yerlerde tanımlıdır.
2. $\frac{d\ln(y)}{dy} = \frac{1}{y}$ olduğundan ln(y) fonksiyonu sürekli artan ve konkav bir fonksiyondur.

Bu özelliği doğal tabanlı üstel fonksiyon özelliklerine göre hem benzer hem de faklı karakter taşır. Doğal tabanlı fonksiyonda olduğu gibi logaritmik fonksiyon da sürekli artan bir fonksiyondur. Ancak doğal tabanlı üstel fonksiyon ***sürekli konveks*** iken, doğal logaritmik fonksiyon tanım kümesinin bütün elemanları için ***sü-***

Doğal tabanlı üstel fonksiyon tanımlı olduğu her yerde sürekli konveks iken, doğal logaritmik fonksiyon sürekli konkavdır.

rekli konkav bir fonksiyondur. Üstel fonksiyonun tanım kümesi tüm reel sayılar iken, logaritmik fonksiyonun tanım kümesi yalnızca pozitif sayılardan oluşur. Son olarak, doğal tabanlı üstel fonksiyonun görüntüleri yalnızca pozitif sayılarda tanımlı iken, logaritmik fonksiyonun değerleri bütün reel sayılar olabilir.

3. ln(1) = 0; ln (e) = 1

4. $\lim_{y\to 0} \ln(y) = -\infty$ $\lim_{y\to +\infty} \ln(y) = +\infty$

5. ln *(ab)* = ln *(a)* + ln *(b)*

   ln (a^b) = *b* ln (*a*)

   $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

y = *g (x)* fonksiyonu türevi alınabilir herhangi tanımlı bir fonksiyon olsun. Zincir kuralı ile birleştirilerek logaritmik türev için aşağıdaki kural elde edilir:

$$\frac{d\ln(g(x))}{dx} = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Üstel ve logaritmik fonksiyonlarda genel türev kuralları

ln (x^y) = *y* ln *(x)* doğru olduğu için aşağıdaki genel kuvvet kuralını yazabiliriz: $x^y = e^{y \ln (x)} = e^{\text{üst} \times \ln (\text{taban})}$; Bu durumda kısmi türev kuralları şöyle yazılır:

$$\frac{\partial x^y}{\partial y} = e^{y\ln(x)}\ln(x) = x^y \ln(x)$$

$$\frac{\partial x^y}{\partial x} = e^{y\ln(x)}\left(y\frac{1}{x}\right) = yx^y\frac{1}{x} = yx^{y-1}$$

y = a^x şeklinde üstel bir fonksiyonun türevi de

$\frac{da^x}{dx} = \ln(a)a^x$ kuralına göre belirlenir.

Yukarıdaki türev kurallarının yardımıyla ortaya çıkan, iktisatçılar için kullanışlı, bir bilgi vardır. *y* = a^x şeklindeki bir üstel fonksiyonun ani büyüme oranı ln *(a)* şeklinde logaritmik ifade ile belirlenir. Bununla birlikte kuvvet fonksiyonlarında türev kuralı farklıdır. Unutmayalım ki kuvvet ve üstel fonksiyonlar birbirinden farklı yapıda fonksiyonlardı.

y = x^b tipinde kuvvet fonksiyonlarında türev,

$\frac{dx^b}{dx} = bx^{b-1}$ kuralına göre alınırdı.

y = a^x, ($a > 0$, $a \neq 1$) şeklinde tanımlanan üstel bir fonksiyonun tersi *a* tabanlı logaritmik fonksiyon olarak adlandırılır ve $\log_a(y)$ şeklinde gösterilir. Bir başka ifadeyle üstel ve logaritmik fonksiyonlar arasındaki ilişki şöyledir:

$x = \log_a (y) \Leftrightarrow y = a^x$

$y = a^x \Leftrightarrow y = e^{x\ln(a)} \Leftrightarrow \ln(y) = x\ln(a) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(y)}{\ln(a)}$ ifadesi ile birlikte,

$\log_a(y) = \dfrac{\ln(y)}{\ln(a)}$ ifadelerinin doğru olduğunu biliyoruz. Bu iki bilgiyi birleştirerek

$\log_a(y)$ için türev kuralını yazabiliriz:

$$\frac{d\left(\log_a(y)\right)}{dy} = \frac{1}{\ln(a)\,y}$$

İKTİSAT UYGULAMALARI

Ünitenin başında ifade ettiğimiz gibi, üstel ve logaritmik fonksiyonlarla ilgili temel bilgilerden sonra şimdi de iktisat lisans eğitiminde kullanıldıkları bazı alanlardaki örnek uygulamaları inceleyeceğiz.

Bileşik Faiz

ÖRNEK 1

Varsayalım ki Paragöz Bankası bize aylık vade ile yıllık %5,5'lik nominal faiz oranı önermektedir. Cingöz Bankası ise günlük vade ile yıllık %5,4'lük nominal faiz oranı önermektedir. Bizim için hangi bankanın önerisi daha iyi bir fırsattır?

Çözüm: Paragöz Bankası tarafından ödenen efektif yıllık faiz (bir yıl sonra her liranız için kazandığınız miktarı ifade eder)

$$r_{ef,A} = \left(1 + \frac{r_A}{12}\right)^{12} - 1 = \left(1 + \frac{0,055}{12}\right)^{12} - 1 = \%5,64$$

Aynı şekilde Cingöz Bankasının efektif yıllık faiz ödemesi de

$r_{ef,B} = \left(1 + \dfrac{r_B}{365}\right)^{365} - 1 = \left(1 + \dfrac{0,054}{365}\right)^{365} - 1 = \%5,55$ şeklinde hesaplanır.

Paragöz ve Cingöz Bankalarının bize ödedikleri efektif faiz oranları kıyaslandığında, görülür ki, Paragöz Bankası bizim için daha iyi teklif sunmuştur.

ÖRNEK 2

Varsayalım ki bir ticari banka bizim tasarruflarımızı değerlendirmek istiyor. Banka bize r kadar yıllık nominal faiz oranı teklif ediyor. Bununla birlikte faiz hesabında sürekli bileşen yaklaşımını kullanacağını yani, paramıza her an faiz işleyeceğini söylüyor. Biz de bu durumda yatırdığımız A kadar paranın ne kadar sürede ikiye katlanacağını merak ettik.

Çözüm: Sürekli bileşen formülünü hatırlayalım,

$P_1 = P_0 e^{rt}$ şeklinde idi.

Biz bankaya A kadar para yatırdığımıza göre formülde A'yı yerine yazarsak

$A_1 = A_0 e^{rt}$ olur.

Şimdi de biliyoruz ki gelecekteki paramız şimdinin iki katı olacak. Bu bilgiyi de formülde yerine yazarsak

$2A_0 = A_0 e^{rt}$ denklemini elde ederiz. Denklemin her iki tarafını da A_0 ile bölersek

$2 = e^{rt}$ elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının da doğal logaritması alınırsa,

$\ln 2 = \ln e^{rt}$ eşitliğine ulaşırız. $\ln e = 1$ olduğu için,

ln 2 = rt eşitliği elde edilmiş olur. Artık A kadar paranın iki katına çıkması için gerekli zamanı bulabilmek için t i yalnız bırakmamız yeterlidir:

70 kuralı. Anaparanın ikiye katlanması için gerekli süre, 70'i faiz oranına bölerek bulunur.

$t = (\ln 2)/r$ olur. ln 2 değeri yaklaşık olarak 0,69 olduğu için buradan bir kural geliştirilebilir. 70 kuralı olarak adlandırılabilecek bu kurala göre ikiye katlama için gerekli zamanı bulmak için 70'i faiz oranına bölmek yeterli olacaktır. Örneğin faiz oranı yıllık nominal %10 olur ise ikiye katlama için gerekli zaman (70/10) = 7 yıl olacaktır.

SIRA SİZDE 1

Şimdiden 5 yıl sonra ₺10000 paranız olsun istiyorsunuz. Size yıllık vade uygulayarak yıllık nominal %10 faiz oranı öneren bir banka buldunuz. Bankaya bugün ne kadar yatırmanız gerekir?

Üstel Azalma

Deneysel tecrübelerle elde edilen bir bilgiye göre radyoaktif partiküllerin bir çoğu üstel fonksiyon kaideleriyle azalma veya silinme seyri izlerler. Radyoaktif partikülün başlangıçtaki büyüklüğü Q_0 olarak kabul edildiğinde zaman içerisinde azalmasını gösteren fonksiyon şöyle olacaktır:

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt}$$

Yukarıdaki fonksiyonda k pozitif bir sabittir ve azalma oranını ifade eder. Bu oran genellikle başlangıç miktarının tam yarısına kadar azalma olabilmesi için gerekli olan zamana göre tanımlanır. Bu gerekli zaman da radyoaktif partikülün yarı-yaşamı (half-life) olarak adlandırılır.

ÖRNEK 3 *$Q(t) = Q_0 e^{-kt}$ formülüne göre üstel azalma seyri izleyen radyoaktif bir partikülün yarı yaşamının $\bar{t} = \dfrac{\ln 2}{k}$ kadar olduğunu gösterin.*

Çözüm: Gerekli zamanı ararken amacımız $Q(\bar{t}) = \frac{1}{2}Q_0$ eşitliğini sağlayacak $\bar{t}$ değerini hesaplamak olacaktır. Öyleyse:

$\frac{1}{2}Q_0 = Q_0 e^{-k\bar{t}}$ denkliğini doğrulayacak $\bar{t}$ değerini hesaplamak gereklidir. Bu eşitliğin her iki tarafını Q_0 ile böldüğümüzde,

$\frac{1}{2} = e^{-k\bar{t}}$ eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının da doğal logaritmasını alırsak, ln e = 1 olduğundan,

$\ln\frac{1}{2} = -k\bar{t}$ sağlanmış olur. Artık yarı-yaşam için gerekli süreyi bulmakta tek iş bu eşitlikte $\bar{t}$ 'i yalnız bırakmak olacaktır. Böylece yarı-yaşam,

$$\bar{t} = \frac{-\ln\frac{1}{2}}{k} = \frac{\ln 2}{k}$$ olarak hesaplanır.

Türevler

ÖRNEK 4

$g(x) = x^x$ fonksiyonunun birinci türevini hesaplayın.

Çözüm: Logaritmik türev alma kurallarını kullanarak çözüme ulaşmak gerekmektedir. O zaman:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{d\left(\ln x^x\right)}{dx} = \frac{d\left(\ln e^{x\ln(x)}\right)}{dx} = \frac{d\left(x\ln(x)\right)}{dx}$$

$$= 1\times\ln(x) + x\times\frac{1}{x} = \ln(x)+1$$

$g'(x) = \left(\ln(x)+1\right)x^x$ şeklinde elde edilir.

Lojistik Eğrisi

ÖRNEK 5

A, B ve k'nın pozitif birer sabit olduğu $Q(t) = \frac{B}{1+Ae^{-Bkt}}$ fonksiyonunun grafiği lojistik eğrisi olarak adlandırılır. Lojistik eğrisi her türlü büyüme işlemi için kullanılabilir. Eğer büyüme işleminde çevresel faktörlerin büyüme oranını frenleyecek etkisi varsa, o zaman lojistik eğrisi bu büyüme işlemini tanımlayabilmek için kullanılır.

$Q(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$ tipindeki lojistik eğrisinin büyüme oranının (1 - Q(t))'e eşit olduğunu gösterin.

Çözüm: Önce *Q*'nın zamana göre değişimini türev yardımıyla ölçelim. Unutmayalım ki bu ölçüm bize zamana göre büyümeyi gösterecektir,

$$Q'(t) = \frac{-e^{-t}(-1)}{\left(1+e^{-t}\right)^2} = \frac{e^{-t}}{\left(1+e^{-t}\right)^2}$$

Büyümeyi yukarıda elde ettiğimize göre artık büyüme oranını tanımlayabiliriz. Eğer yukarıdaki büyümeyi, *Q*'nın kendisiyle oranlarsak o zaman büyüme oranını elde ederiz:

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} = \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}$$ Büyüme oranını yandaki gibi gösterdikten sonra, son olarak bu ifadenin *1 - Q(t)* ile aynı olduğunu göstermemiz gerekiyor.

Öyleyse, $1-Q(t)=\dfrac{1+e^{-t}-1}{1+e^{-t}}=\dfrac{e^{-t}}{1+e^{-t}}$ olduğunu yazmak bizi çözüme götürür.

SIRA SİZDE 2

Yapılan bir araştırmaya göre bir tür grip salgını baş gösterdikten t hafta sonra yaklaşık olarak $Q(t)=\dfrac{20}{1+19e^{-1,2t}}$ bin kişi hastalığa yakalanmaktadır. Bu bilgiye göre:

a) Hastalık kendini ilk gösterdiğinde kaç kişi hasta olmuştur? 2 hafta sonra kaç kişi hastadır?

b) Yaklaşık olarak ne kadar süre sonra hastalığın yayılması azalmaya başlayacaktır?

c) Eğer eğilim hep böyle devam ederse, sonunda yaklaşık kaç kişi hastalığa yakalanmış olacak?

Esneklik

İktisatçılar olarak biliyoruz ki, eğer talebin fiyat esnekliği 0 ve -1 aralığında ise o mal esnek olmayan mal olarak; yok eğer fiyat esnekliği -1 ile -∞ aralığında ise o mal esnek mal olarak ve son olarak da eğer fiyat esnekliği -1'e eşitse o mal da birim esnek mal olarak adlandırılır. Bu bilgilerin kullanıldığı bir iktisat teoremini örnek olarak inceleyelim.

ÖRNEK 6

"Esnek olmayan bir mal için fiyatta bir artış toplam harcamaları arttırıcı bir etki yaparken, esnek bir mal için fiyat artışı toplam harcamaları düşürecektir". Bu iddianın doğru olup olmadığını gösterin.

Çözüm: $Q = F(p)$ ilgilendiğimiz mal için talep fonksiyonu olsun. O zaman p fiyatında toplam harcamalar şöyle hesaplanır:

$E(p) = pQ = p\,F(p).$

Toplam harcamaların, yani $E(p)$' nin artıp azaldığını anlayabilmek için birinci türevinin işaretini incelememiz yeterli olacaktır. Öyleyse

$E'(p) = pF'(p) + 1F(p)$ şeklinde hesaplanan toplam harcamaların birinci türevinin işaretini incelemeliyiz. Yukarıdaki eşitlikte eşitliğin her iki tarafını da $F(p)$'e bölersek:

$[E'(p)/F(p)] = (pF'(p)/F(p)) + 1 = \varepsilon + 1$

elde edilir. Buna göre eğer bir mal esnek olmayan bir mal ise $-1<\varepsilon<0$ doğru olacak ve de bu yüzden $(\varepsilon+1)>0$ olacaktır. Böylece $E'(p)$' nın pozitif değer alacağını göstermiş olduk. Yani diğer bir deyişle toplam harcamaların ($E(p)$'nin) fiyata göre artan bir fonksiyon olduğu gösterilmiş oldu. Diğer yandan, bir mal esnek olduğunda $\varepsilon<-1$ olacağından, $(\varepsilon+1)<0$ olacaktır. Bu $E'(p)$' nin negatif değer alacağı anlamına gelir ki bu da $E(p)$'nin yani toplam harcamaların fiyata göre azalan bir fonksiyon olduğunu gösterir.

SIRA SİZDE 3

$Q(p) = 10p^3 - 1000$ şeklinde verilmiş bir arz fonksiyonu olsun. Arzın fiyata göre esnekliğini p = 10 değeri için hesaplayın.

Fiyat Esnekliği

Aşağıdaki talep fonksiyonunu ele alalım: **ÖRNEK 7**

Q^d = 1000 - P^3. Bu fonksiyonda miktar ton cinsinden ve de fiyatlar ₺ cinsinden olsun. Hemen birinci türevi hesaplarsak

$\frac{dQ^d}{dP} = -3P^2$ elde edilir.

Eğer şu anki fiyat ₺5 iken fiyat ₺1 arttırılırsa, talep edilen miktar yaklaşık olarak

$$\left.\frac{dQ^d}{dP}\right|_{P=5} = 3\times 5^2 = 75$$

75 ton azalacaktır. Bu durumda fiyatlardaki %1'lik bir artış fiyatlarda $5p = \frac{1}{20}\times 1$ ₺'lik bir artışı ima edecek ve dolayısıyla talep miktarını $3,75 = \frac{75}{20}$ ton kadar azaltacaktır. Fiyat ₺5 olduğunda talep 1000-5^3=875 ton olacağından yüzdesel talep azalışı $\frac{3,75}{8,75} \approx 0,0043 = \%0,43$ kadar olacaktır. Yani, fiyatlardaki %1'lik artış, talep miktarını %0,43 azaltacaktır. Bu da elimizdeki malın incelenen fiyat düzeyinde esnek olmayan bir yapıda olduğunu gösterir.

Genelleyerek ifade edersek, $\frac{dQ^d}{dP}$ malın fiyatı ₺1 arttığında talepte meydana gelecek yaklaşık değişimdir. Başlangıç fiyatını P olarak kabul edelim. ₺1'lik artış yüzdesel olarak $\frac{100}{P}$ kadar artış anlamına gelir. Böylelikle, fiyatta meydana gelen %1'lik artış, talep miktarını yaklaşık olarak $\frac{P}{100}\times\frac{dQ^d}{dP}$ ton kadar değiştirmiş olur. O zaman talep miktarında meydana gelen yüzdesel değişim, yaklaşık olarak

$$ped(P) = \frac{100}{Q^d}\times\frac{P}{100}\times\frac{dQ^d}{dP} = \frac{dQ^d}{dP}\times\frac{P}{Q^d}$$ kadar olur.

Yukarıda elde ettiğimiz formül talebin fiyat esnekliği formülüdür. Bu formülü yeniden organize ettiğimizde,

$ped(P) = \frac{dQ^d}{Q^d} \div \frac{dP}{P}$ = ε, elde edilir. Burada $100\frac{dP}{P}$ fiyattaki yüzdesel artışı ve $100\frac{dQ^d}{Q^d}$ ise miktarda meydana gelen yüzdesel değişimi ve ε genel olarak iktisatta esnekliği ifade etmektedir. Örneğimizdeki fiyat esnekliğine dönersek

$ped(P) = \left(-3P^2\right)\times\frac{P}{Q^d} = -3\frac{P^3}{1000-P^3}$ = ε şeklinde hesabımızı yaparız. Bu örnekte talebin esnek olmayan bölümü incelenmek istendiğinde, ε<1 olan bölüm ele alınmalıdır. Bu durumda,

$3\frac{P^3}{1000-P^3} < 1$ ifadesi doğru olmalıdır. Bir başka ifadeyle,

$3P^3 < 1000 - P^3$ olmalı, yani,

$4P^3 < 1000$ olmalıdır. Buradaki eşitsizliğin her iki tarafını da 4'e böldüğümüzde,

$P^3 < 250$ eşitsizliği elde edilir. Son olarak eğer fiyat (P) yaklaşık olarak 6,3'ten küçük olursa esnek olmayan talepten bahsedebiliriz. Böylece anlıyoruz ki, $P = \sqrt[3]{250}$ olduğu zaman talep fiyata göre birim esnek ve bu değerden büyük ise talep esnektir.

Toplam Hasıla

Yukarıdaki örneğimize bu başlık altında da devam edeceğiz. $Q^d = 1000 - P^3$ şeklinde talep fonksiyonu olduğunu kabul ettiğimize göre, toplam hasılayı bulurken, bu talep bilgisini kullanacağız demektir. Toplam hasıla satılan ya da üretilen toplam miktar ile malın fiyatının çarpılmasıyla kolayca hesaplanabilir. Buna göre toplam hasıla örneğimizde şöyle olur:

$$TR = PQ^d = P\,(1000 - P^3).$$

Toplam hasılanın maksimum olduğu nokta ise birinci türevinin sıfıra eşit olduğu yerdedir. Yani, $\frac{dTR}{dP} = 1000 - 4P^3 = 0$ olduğu zaman, toplam hasıla maksimum düzeye ulaşmış demektir. Bu hesabı yukarıda yapmıştık. $P = \sqrt[3]{250}$ bu hesabın sonucu olarak karşımıza çıkar. Demek ki fiyat bu düzeyde olduğunda toplam hasıla maksimum düzeyine ulaşmaktadır. Bu fiyat düzeyinde talebin fiyata göre birim esnek olduğunu biraz önce söylemiştik.

İkinci türev hesapladığımızda,

$\frac{d^2TR}{dP^2} = -12P^2 < 0$ olduğu bulunur. Bu durum $P = \sqrt[3]{250}$ düzeyinin solunda toplam hasılanın artmakta olduğunu, sağında ise azalmakta olduğunu ifade eder.

Ters Talep

7. örnekteki verilerle yola devam ediyoruz. Şimdi de iktisatta ters talebin ne olduğunu örnek üzerinde inceleyerek göreceğiz. Fiyat belirli bir düzeyde olduğunda tüketicinin talep edeceği miktar şu fonksiyonla belirlenir:

$Q = Q^d(P) = 1000 - P^3$. Yanda gördüğümüz standart bir talep fonksiyonudur. Biz buradan fiyatı çeker ve onun için bir denklem yazmak istersek

$P^3 = 1000 - Q$ eşitliğini elde ederiz. Buradan da P'i yalnız bıraktığımızda,

$P^d = \sqrt[3]{1000 - Q}$ denklemini elde ederiz ki bu son denklem iktisatta ters talep fonksiyonu olarak adlandırılır.

Marjinal Hasıla

Yukarıda kullandığımız talep fonksiyonunu kullanmaya devam edelim. Ters talebi açıklamadan hemen önce örneğimizdeki talep fonksiyonunu kullanarak toplam hasılayı fiyatın bir fonksiyonu olarak tanımladık ve toplam hasılanın fiyata göre $\left(\frac{dTR}{dP}\right)$ türevini hesapladık. İktisatçılar için bu türevin özel bir anlamı yoktur. Bu noktada, toplam hasılayı ters talep fonksiyonu kullanarak miktarın bir fonksiyonu şeklinde yazabiliriz:

$$TR = PQ = \sqrt[3]{1000 - Q} \times Q = (1000 - Q)^{\frac{1}{3}} \times Q$$

Unutmayalım ki, fiyat arttıkça talep miktarı azalmaktadır. Yani, toplam hasıla fiyat arttığı için artmakta, ama fiyat artınca miktar azaldığı için de azalmaktadır.

Marjinal hasılanın, piyasada satılan mal miktarı küçük bir birim arttığında toplam hasılada dolayısıyla meydana gelen ek değişim olduğunu daha önceden biliyorduk. Böylece, marjinal hasıla formülünü bizim örneğimize uygularsak

$MR = \frac{dTR}{dQ} = -\frac{1}{3}(1000-Q)^{-\frac{2}{3}} \times Q + (1000-Q)^{\frac{1}{3}}$ denklemini elde ederiz.

Bu denklemi kullanarak marjinal hasılayı sıfır yapan miktarı hesaplayabiliriz:

$$(1000-Q)^{-\frac{2}{3}} \times Q = 3(1000-Q)^{\frac{1}{3}}$$
$$Q = 3\,(1000 - Q) = 3000 - 3Q$$
$$4Q = 3000$$
$$Q = 750.$$

Piyasada satılan mal miktarı 750 ton olduğu zaman marjinal hasıla sıfır değerini almakta, başka bir ifadeyle toplam hasıla maksimum değerine ulaşmaktadır. 750 tonluk talep miktarı fiyatın $P = \sqrt[3]{250}$ olduğu zaman gerçekleşen taleptir. Talep edilen miktar 750 tonun üzerinde olursa marjinal hasıla negatif değer almakta ve dolayısıyla da toplam hasıla azalmaktadır. Yok eğer talep edilen miktar piyasada 750 tonun altında olursa marjinal hasıla pozitif değer alır ve toplam hasıla da bu bölgede artar.

Genel olarak bakıldığında talebin fiyat esnekliği ile marjinal hasıla arasında bir ilişki kurmak mümkündür. Bu ilişkiyi gösteren eşitlik,

MR = P.((1+1/ε)) şeklinde yazılır. Burada ε notasyonu esnekliği ifade etmektedir. Şimdi bu ilişkinin elde edilmesinde kullanılan adımlara bakalım:

$\frac{dTR}{dP} = \frac{d\left(PQ^d\right)}{dP} = Q^d + P\frac{dQ^d}{dP}$, toplam hasılanın fiyata göre türevi yandaki gibidir.

Türevde zincir kuralı gereği bu ifadeyi,

$\frac{dTR}{dP} = \frac{dTR}{dQ}\frac{dQ^d}{dP}$ şeklinde de yazabiliriz. Bu şekilde yazdığımızda artık iktisatçılar için anlamlı olan toplam hasılanın miktara göre türevi kullanılabilir hale gelmektedir. Böylece marjinal hasıla ile esneklik arasındaki ilişkiyi şu şekilde yazabiliriz:

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = \left(Q^d + P\frac{dQ^d}{dP}\right) \Big/ \frac{dQ^d}{dP} = \frac{Q^d}{\frac{dQ^d}{dP}} + P = \frac{P}{\frac{dQ^d}{dP}\frac{P}{Q^d}} + P$$

Esneklik ve Logaritma

Varsayalım ki, $Q^d(P)$ şeklinde tanımlı bir talep fonksiyonu için elimizde fiyat ve miktar (P, Q) noktalarını gösteren veri kümesi bulunmaktadır. Yine varsayalım ki çok dar bir fiyat kümesi için doğrusal tahminleme modeli çalıştırdık. Ama bu tahminlemeyi elimizdeki orijinal veriler için değil değişime uğrayıp $(x, y) = (\ln P, \ln Q)$ halini almış veriler için yaptık. Doğrusal tahminleme model sonuçlarımızın bize verdiği eğim, talep fonksiyonunun değil de logaritmik transformasyona uğramış

talep eğrisinin eğimini yaklaşık olarak verir. Yani burada $\frac{dy}{dx}$ tahmin edilmiş olur. $\frac{dy}{dQ} = \frac{1}{Q}$ ve $P = e^x$ olduğu için, $\frac{dP}{dx} = e^x = P$ elde edilir. Zincir kuralını iki kere uyguladığımızda

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dQ}\frac{dQ}{dP}\frac{dP}{dx} = \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dP}P = \varepsilon$ eşitliği elde edilir. Bir başka deyişle, logaritmik transformasyona uğrayarak doğrusal hale gelen talep fonksiyonlarında *lnQ*'nın *lnP*'e göre türevi hesaplanırsa bu bize esnekliği verecektir.

Bu özelliği örnek 7'de kullandığımız talep fonksiyonuna benzer bir fonksiyonda logaritmik transformasyon yaptıktan sonra kullanabiliriz.

ÖRNEK 8

Talep fonksiyonu $Q^d = 1000P^{-3}$ şeklinde tanımlı olsun. Logaritma yardımıyla talebin fiyat esnekliğini hesaplayın.

Çözüm: Burada logaritmik transformasyon için doğal logaritmayı kullanacağız. Eşitliğin her iki tarafının doğal logaritması alındığında, logaritma kuralları gereği, $\ln Q^d = \ln 1000 - 3 \ln P$ denklemi elde edilir. Elimizde üstel yapıda olan bir talep fonksiyonu vardı. Logaritma kullanarak bu fonksiyonu logaritmik ve doğrusal yapıya kavuşturduk. Artık yalnızca basit bir türev alarak talebin fiyat esnekliği hesaplamak mümkün hâle gelmiştir:

$\frac{d(\ln Q)}{d(\ln P))} = \varepsilon = -3$ Yanda görüldüğü gibi bu malın talebi fiyata göre esnek çıkmıştır. Bir başka özellik ise bu talep fonksiyonunun her noktasında esneklik sabit ve 3'e eşittir.

SIRA SİZDE 4

$Q^s = \beta P^a$ şeklinde tanımlı bir arz fonksiyonu varsayalım. Burada $\beta > 0$ ve $a > 1$ olacaktır. Bu fonksiyona göre arzın fiyat esnekliğini hesaplayın.

Diğer Esneklikler

Talep fonksiyonunu yazarken iktisada girişte kullandığımız ceteris paribus kuralı her zaman işlerimizi kolaylaştırmıştır. Talebi belirleyen faktörler incelenirken, yalnızca ilgili malın fiyatı değil, gelir, zevk ve tercihler, diğer malların fiyatları gibi etkenlerin de konunun ilgisini oluşturduklarını biliyoruz. Ancak basit talep ve arz denklemleri yardımıyla piyasada neler olduğunu anlayabilmek için ilgili malın fiyatı hariç diğer değişkenler analiz boyunca sabit kabul edilmişti. Talebi etkileyen diğer faktörlerden gelir ve diğer malların fiyatları serbest bırakıldığında bir mal için talep fonksiyonu,

$Q^d = 100 - p + 2p^* - 3y$ gibi yazılabilir. Bu fonksiyonda p ilgili malın fiyatını, p^* başka bir malın fiyatını ve y geliri temsil etmektedir. Denklemi buradaki gibi üç ayrı açıklayıcı değişkenle yazdığımız da artık kısmi türev kurallarını kullanarak çeşitli esneklik hesaplamalarını yapabiliriz. Yukarıdaki talep fonksiyonunu hesaplamalar için örnek olarak kullanalım.

ÖRNEK 9

$Q^d = 100 - p + 2p^* - 3y$ yandaki talep fonksiyonuna göre,

a) talebin fiyat esnekliğini hesaplayın.

b) Çapraz fiyat esnekliğini hesaplayın ve iktisadi olarak yorumlayın.

c) Gelir esnekliğini hesaplayın ve iktisadi olarak yorumlayın.

Çözüm:

a) Daha önce çözülen talebin fiyat esnekliği problemlerinden tek fark bu soruda çok değişkenli fonksiyon olmasıdır. Bu sebeple de direkt türev yerine kısmi türev yaklaşımı kullanılacaktır. Bunun dışında başka bir değişiklik yer almayacaktır. Talebin fiyat esnekliği formülünü uyguladığımızda

$\frac{\partial Q^d}{\partial p}\frac{p}{Q^d} = -\frac{p}{Q^d}$ sonucu elde edilir.

b) Bu sefer de kısmi türev kurallarıyla çapraz fiyat formülü kullanılacaktır:

$\frac{\partial Q^d}{\partial p^*}\frac{p^*}{Q^d} = 2\frac{p^*}{Q^d}$ Elde edilen sonuç yandaki gibidir. Bu sonuca baktığımızda önce sonucun pozitif ya da negatif olup olmadığını incelemeliyiz. Herhangi bir fiyat ya da talep miktarı negatif değer alamayacağı için sonucumuz pozitif bir sayıdır. Burada diğer mal için hesaplanacak çapraz fiyat esnekliğinin de pozitif sonuç verdiği kabulü ile, soruya konu bahsi olan mal ile diğer malın ikame mallar olduğu söylenebilir.

c) Talebin gelir esnekliğini hesaplamak için hemen verilerimizi formülde yerine yazalım: $\frac{\partial Q^d}{\partial y}\frac{y}{Q^d} = -3\frac{y}{Q^d}$ Elde edilen sonucun pozitif ya da negatif olması konu olan malın özelliği için önemlidir. Elde edilen sonuçta gelir ve talep edilen miktar rakamları da var. Bu değişkenlerin negatif değer alması söz konusu değildir. Bu durumda bu iki değişkenle çarpım durumunda olan -3 sayısı sonucumuzun negatif olacağını belirlemektedir. Bu durumda talebin gelir esnekliği negatif değer almaktadır. Bu gelirimiz arttıkça bu maldan uzaklaştığımız, talep miktarını azalttığımız anlamına gelir. Bir başka deyişle söz konusu mal düşük bir mal olmalıdır.

Özet

AMAÇ 1

Üstel ve logaritmik fonksiyonların temel özelliklerini anlayabilmek ve uygulama alanında kullanabilmek

Üstel fonksiyonlarda açıklayıcı değişken tabanda değil üstte yer alır. Üstel fonksiyonlarda taban pozitif olduğu sürece fonksiyon her zaman konveks olacak ve fonksiyonun görüntü kümesi yalnızca pozitif sayılardan oluşacaktır. Doğal tabanlı fonksiyonda olduğu gibi logaritmik fonksiyon da sürekli artan bir fonksiyondur. Ancak doğal tabanlı üstel fonksiyon ***sürekli konveks*** iken, doğal logaritmik fonksiyonu ***sürekli konkav*** bir fonksiyondur. Üstel fonksiyonun tanım kümesi tüm reel sayılar iken, logaritmik fonksiyonun tanım kümesi yalnızca pozitif sayılardan oluşur. Ayrıca, doğal tabanlı üstel fonksiyonun görüntüleri yalnızca pozitif sayılarda açığa çıkarken, logaritmik fonksiyonun değerleri bütün reel sayılar olabilir.

AMAÇ 2

Bu tip fonksiyonların iktisat lisans eğitiminde hangi alanlarda, ne amaçla kullanıldığını anlayabilmek

Üstel ve logaritmik fonksiyonlar iktisatta, büyüme, grafiksel anlatım, talep, arz, esneklik gibi birçok konuda özellikleri itibarı ile kullanılırlar. Geliştirilen formül ve kurallar iktisatta kendine rahatlıkla uygulama alanı bulur. Örneğin büyüme formülü bu tip fonksiyonlar yardımıyla geliştirilir. Büyüme ya da faiz formülleri yalnızca GSMH ve bankadaki para hesabında değil iktisatta büyüme hesabı yapılan bütün alanlarda değişik versiyonları ile kullanılmaktadır. Örneğin P fiyatlar genel seviyesini ifade ettiğinde, faiz formülü gelecekte fiyatlar genel seviyesinin nasıl olabileceğine dair bilgiler sunacaktır. Bu durumda r enflasyon oranını ifade edecektir.

AMAÇ 3

Makro iktisat ve mikro iktisat alanlarında konuları anlayabilmek için bu fonksiyonları ve özelliklerini uygulamalarınızda kullanabilmek

Üstel ve logaritmik fonksiyonların özelliklerinden yararlanılarak iktisatçılar alanlarında kullanışlı bilgiler geliştirmişlerdir. Örneğin, $y = a^x$ şeklindeki bir üstel fonksiyonun ani büyüme oranı ln (a) şeklinde logaritmik ifade ile belirlenir. Bir başka bilgi de esneklik hesapları için geliştirilmiştir. İktisatçılar olarak biliyoruz ki, eğer bir talebin fiyat esnekliği 0 ve -1 aralığında ise o mal esnek olmayan mal olarak; yok eğer fiyat esnekliği -1 ile $-\infty$ aralığında ise o mal esnek mal olarak ve son olarak da eğer fiyat esnekliği -1'e eşitse o mal da birim esnek mal olarak adlandırılır. Bu bilgilerin kullanıldığı iktisat teoremleri üstel ve logaritmik fonksiyonların türevleri yardımıyla geliştirilmiştir. Bu tip fonksiyonlar sayesinde $MR = (P(1+1/\varepsilon))$ şeklinde yazılan ilişkiler sayesinde marjinal kavramla esneklik kavramı bir arada incelenebilir hale gelmiştir. Talep fonksiyonunu yazarken, iktisada girişte kullandığımız *ceteris paribus* kuralı her zaman işlerimizi kolaylaştırmıştır. Talebi belirleyen faktörler incelenirken, yalnızca ilgili malın fiyatı değil, gelir, zevk ve tercihler, diğer malların fiyatları gibi etkenlerin de konunun ilgisini oluşturduklarını biliyoruz. Talep fonksiyonlarını gerçek yaşama daha uygun yazabilmek için diğer malların fiyatları ve tüketici geliri de denklem de yer almalıdır. Bu tip fonksiyonlarda da kısmi türev kurallarını kullanarak çapraz fiyat esnekliği ve gelir esnekliği gibi esneklik hesaplamalarını yapabiliriz.

Bileşik faiz hesabında kullanılan formül, büyüme alanında da rahatlıkla kullanılabilir. Makro iktisat alanında düşündüğümüzde faiz formüllerindeki P'nin GSMH'yı temsil ettiğini kabul edebiliriz. Bu durumda r büyüme oranını temsil edecektir.

Görüldüğü gibi üstel ve logaritmik fonksiyon tipleri, özellikleriyle beraber iktisat lisans eğitiminde ciddi biçimde kullanılmaktadır. Bu ünitede bu fonksiyonların özelliklerini kısaca tanımayı gerçekleştirdikten sonra, iktisatta yaygın olarak kullanıldığı alanları örnekleriyle birlikte ele aldık. Bundan sonra bu bilgileri uygun diğer iktisat alanlarında kullanabileceğinizi biliyoruz.

MATEMATİKSEL İKTİSAT

4

Amaçlarımız

Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- Doğrusal denklem sistemlerinin çözüm metotlarını açıklayabilecek ve uygulayabilecek,
- Özellikle İkame (yerine koyma) metoduyla sistem problemlerini çözebilecek,
- İktisadi uygulamalarını yapabilecek

bilgi ve becerilere sahip olacaksınız.

Anahtar Kavramlar

- Doğrusal Denklemler
- Eğim-Kesişim Metodu
- İkame (Yerine Koyma) Metodu
- Eleme Metodu
- Piyasa Dengesi
- Dengesizlik Durumu
- İndirgenmiş Form
- Karşılaştırmalı Statik Denge Analizi

İçindekiler

Matematiksel İktisat → Eşanlı Denklem Sistemleri

- DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ
- DOĞRUSAL DENKLEMLERİN İKAME (YERİNE KOYMA) METODUYLA ÇÖZÜMÜ
- DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİNİN EKONOMİK UYGULAMALARI
- KARŞILAŞTIRMALI STATİK DENGE ANALİZİ
- DOĞRUSAL İKTİSADİ MODELLERE İLİŞKİN ÖRNEK ÇÖZÜMLER

Eşanlı Denklem Sistemleri

DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ

Matematikte, doğrusal denklem sistemlerini çözmek için üç farklı metottan yararlanılır. Bu metotlar sırasıyla; Eğim-Kesişim Metodu, İkame (Yerine Koyma) Metodu ve Eleme Metodu olarak sıralanır. Varsayalım ki çözmek istediğimiz doğrusal denklem sistemi aşağıda verilmiş örnek gibi olsun:

İktisatta, eşanlı doğrusal denklem sistemlerini çözmek için sırasıyla Eğim-Kesişim Metodu, İkame (Yerine Koyma) ve Eleme Metotlarından yararlanılır.

$$5x + 7y = 50$$
$$4x - 6y = -18 \qquad (1)$$

Eğim-Kesişim Formunu Kullanarak Çözüm

Bu metotla çözebilmek için öncelikle her iki doğrusal denklemi eğim-kesişim formunda yeniden yazalım; İşimizi kolaylaştırmak için bilinmeyenlerden y'leri denklemlerin sol tarafına alalım ve x'lerin bir fonksiyonuymuş gibi düşünelim. Bu durumda ilk doğrusal fonksiyon;

$$7y = 50 - 5x$$
$$y = 50/7 - 5/7x$$

ve ikinci doğrusal fonksiyon ise;

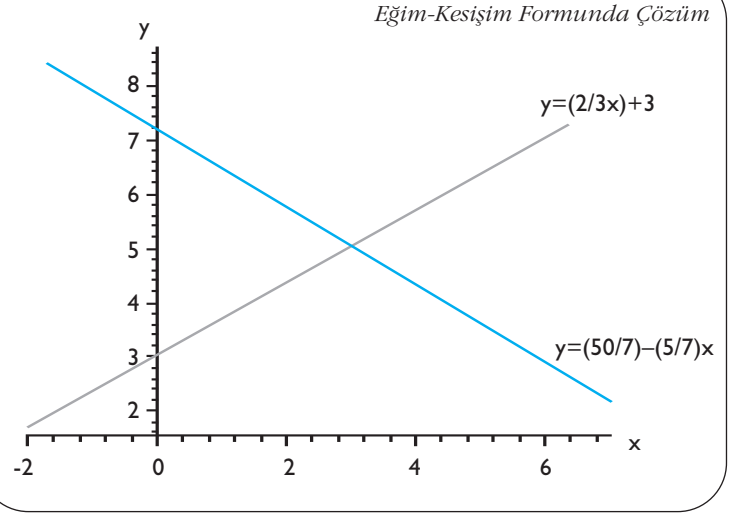
$$4x - 6y = -18$$
$$6y = 4x + 18$$
$$y = 2/3x + 3$$

şeklinde yazılır. Her bir doğrusal denklem için, lineer (doğrusal) fonksiyonları grafik olarak ifade etmek istersek aşağıdaki Grafik 4.1'de gösterilen doğrusal denklemleri elde ederiz.

Yandaki Grafik 4.1'de görüldüğü gibi doğrusal iki fonksiyonun kesiştiği noktada y değerleri aynı olmalıdır. Bundan dolayı, y cinsinden yazılmış olan iki doğrusal fonksiyonun birbirine eşitlenmesi gerekir. Bu işlemin yapılması durumunda;

Grafik 4.1

Eğim-Kesişim Formunda Çözüm



$$50/7 - 5/7\ x = \mathbf{y} = 2/3\ x + 3$$

eşitliği elde edilir. Buradan bilinenlerle bilinmeyenleri bir tarafa almamız durumunda;

$$50/7 - 3 = 2/3\ x + 5/7x$$
$$150 - 63 = 14x + 15x$$
$$87 = 29x$$
$$\mathbf{x} = 87/29 = \mathbf{3}$$

sonucunu buluruz. Çözüm sonucunda **x** değerini 3 olarak bulundu. **y** değerini hesaplamak için eğim-kesişim formunun doğrusal fonksiyonlarından herhangi birini kullanabiliriz. Denklemlerden ikincisini kullanalım. Bu denklemde x yerine 3 değerini ikame etmemiz durumunda;

$$\mathbf{y} = 2/3 * (3) + 3 = \mathbf{5}$$

y değeri 5 olarak hesaplanır.

Denklem sisteminin çözümü ise: $x^* = 3$, $y^* = 5$.

DİKKAT

Çözümlerin doğruluğunu kontrol etmek için bulunan x ve y değerlerinin ilk denklemde yerine koyulup kontrol edilmesi şiddetle tavsiye edilir.

$5 * 3 + 7 * 5 = 15 + 35 = 50$
$4 * 3 - 6 * 5 = 12 - 30 = -18$

Sağlama sonucunda başlangıç değerleri bulunduğuna göre işlemimiz doğrudur.

İkame (Yerine Koyma) Metodu

İkame metodunda denklem sistemindeki doğrusal fonksiyonlardan biri alınır ve y veya x cinsinden yazılır. Diyelim ki y cinsinden yazılan fonksiyon daha sonra sistemdeki diğer fonksiyonda y görülen yer(ler)e ikame edilir ve x cinsinden ifade edilen tek bilinmeyenli bir denklem haline dönüştürülür. X cinsinden değeri bulunur ve bu x değeri sonra ikame yoluyla y değerinin hesaplanmasında kullanılır.

İkame metoduyla çözümü görebilmek için yine doğrusal denklem sisteminde aynı örneği kullanalım:

$$5x + 7y = 50$$
$$4x - 6y = -18$$

İkame metodu ile çözümü gösterebilmek için yukarıda verilen doğrusal denklem sistemindeki denklemlerden birisini alalım. Aldığımız denklem ikinci doğrusal fonksiyon olan

$$4x - 6y = -18$$

olsun. Denklemin y cinsinden yazılıp sadeleştirilmesi durumunda,

$$4x + 18 = 6y$$
$$y = 4/6x + 3 = 2/3x + 3$$
$$y = 2/3x + 3 \qquad (2)$$

sonucu elde edilir.

Bulduğumuz y değerini (y = 2/3x + 3) sistemdeki diğer denklemdeki (5x + 7y = 50) gördüğümüz y'nin yerine ifadeleri parantez içerisinde yazarak koyalım.

5x + 7y = 50
5x + 7 (2/3x + 3) = 50
5x + 14/3 x + 21 = 50
15/3x + 14/3x + 21 = 50

İkame etmemiz ve sadeleştirme sonucunda iki bilinmeyenli denklem sistemi x cinsinden ifade edilen tek değişkenli bir denklem hâline dönüştü. Bilinen ve bilinmeyenleri bir tarafa aldığımızda,

29/3x = 50 - 21= 29
x = 3/29 * 29 = 3

x değeri 3 olarak bulunur. y değerini bulmak için bulduğumuz x değerini y = 2/3x + 3 denkleminde yerine koymamız yeterli olacaktır. İşlem sonucunda,

y = 2/3x + 3 = 2/3 * 3 + 3 = 5

y değeri 5 olarak bulunur. Dolayısıyla sistem için çözüm, x = 3, y = 5'tir.

DOĞRUSAL DENKLEMLERİN İKAME (YERİNE KOYMA) METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Yukarıdaki örnek sistem haricinde, şimdi yerine koyma metoduyla doğrusal denklem sistemi çözümünü daha detaylı inceleyelim. Bu bağlamda, iki bilinmeyenli ve iki denklemli sistem çözümlerinden çok bilinmeyenli çok denklemli sistem çözümünü yerine koyma metoduyla detaylı olarak ortaya koyalım.

Doğrusal denklem Sisteminde Eşitlikleri ve Bilinmeyenleri Sayma

Bir eşitliği çözüp çözemeyeceğinizi nasıl belirlersiniz? Kural oldukça basittir: eşitlikleri ve sonra da bilinmeyenleri (değişkenleri) sayarız.

- Eğer eşitlik sayısından daha fazla değişken varsa sistemi çözmek için yeterli ipucunuz yok demektir.
  Örneğin, y = x + z ve z = 5 şeklinde iki eşitlik ve 3 değişkene sahipseniz, y = x + 4 olduğunu bilirsiniz ama bir eşitlik daha olmadan y veya x'i çözecek yeterli bilgiye sahip olamazsınız.
- Diğer taraftan, eğer elinizde değişkenlerden daha fazla eşitlik varsa, çok fazla ipucunuz var demektir.
  Örneğin, 4 eşitlik ve 3 bilinmeyene sahipseniz eşitliklerden bir tanesi ya tutarsız ya da bağımlı olacaktır.

Eşitlikleri saydıktan sonra kontrol etmemiz gerekir. Eşitliklerin, doğrusal, bağımsız ve tutarlı olmaları gereklidir.

"Doğrusal" nedir? Eşitliğin doğrusal olması, kontrol edilen bütün eşitliklerin,

y = a + bx

formatında olması gerekliliğidir. Bu özellik formattaki a veya b'nin 0 ya da 1 olduğu durumları da içerir ki böyle durumlarda y = a ya da y = x olur. Doğrusal olması formatın üs, kare (veya başka bir seviyede), kök, xy veya x/y olmaması durumunu ifade eder.

Bir eşitliğin doğrusal olması, kontrol edilen bütün eşitliklerin, y = a + bx, formatında olması ve formatın üs, kare, kök, xy veya x/y olmaması anlamına gelir. Doğrusallık özelliği, formattaki a veya b'nin 0 ya da 1 olduğu durumları da içerir ki böyle durumlarda y = a ya da y = x olur.

"Bağımsız" nedir? Bu durum en iyi, birbirinden bağımsız olmayan iki eşitlikle gösterilebilir. Örneğin, y = x ve 2y = 2x, denklemleri bağımsız değildir. Eğer birisi doğruysa öteki de doğru olmak zorundadır. Örnekteki denklemlerin gerçekte her ikisi de mükerrer yazılmış olan aynı fonksiyondur, dolayısıyla ikisini de denklem olarak sayamazsınız.

"Tutarlı" nedir? Bu durum daha bariz bir şekilde ifade edilebilir. Aynı anda hem y = x hem de y = x + 2 doğru olamaz.

En Küçük Durum: İki Eşitlik ve İki Bilinmeyen

Bilinmeyen iki değişkeni x ve y değişkenleri olarak isimlendirelim. Öncelikle eşitlikleri yazıp, gerekiyorsa sadeleştirmek gerekir. Daha sonra eşitlikler ve bilinmeyenler sayılır ve devamında bağımsızlıklarını ve tutarlılıklarını kontrol ederiz.

Varsayalım ki iki eşitliğimiz,

$$y = 300 - 11x$$
$$y + x = 200$$

şeklinde verilmiş olsun. Öncelikle bilinmeyenlerden birini bir tarafa, diğerini de diğer tarafa atmak gerekir. Bu yapılırsa

$$y = 300 - 11x$$
$$y = 200 - x$$

denklemlerini elde ederiz. Denklemlere baktığımızda doğru sayıda eşitlik, doğru sayıda bilinmeyenler, doğrusallık, bağımsızlık ve tutarlılık olduğunu görürüz.

Buradan sonra çözüm için "Birinci Adım", (hangisi daha kolaysa,) y=y veya x=x şeklinde bir eşitlik oluşturmaktır.

Örnek denklemlere bakınca, y'nin kolayda ve yalnız başına olduğunu görüyoruz, öyleyse y = y şeklinde eşitlik seçelim.

$$y = 300 - 11x$$
$$y = 200 - x$$
$$y = y$$
$$300 - 11x = 200 - x$$

Şimdi tek bilinmeyenli (x) tek bir denkleme düştük. İkinci Adım: Öteki değişken için çözüm yapmaktır. y=y yazmıştık, öyleyse bunun anlamı x için çözüm yapacağız demektir. x için çözüm yaptığımızda,

$$300 - 11x = 200 - x$$
$$300 - 200 = 11x - x$$
$$100 = 10x$$
$$x = 10$$

değerini buluruz. Üçüncü Adım x için bulduğumuz rakamsal değeri denklemlerden birine götürüp yerine koymak ve öteki değişken (y) için çözüm bulmaktır.

$$y = 300 - 11x$$
$$y = 300 - 11(10)$$
$$y = 300 - 110$$
$$y = 190$$

En Sık Karşılaşılan Durum: Üç Eşitlik ve Üç Bilinmeyen

Üç eşitlik ve üç bilinmeyenli denklem sistemleri aslında 2-2'lik sisteme göre çok daha zor olacakmış gibi görünse de gerçekte neredeyse daha kolaydır. Bunun nedeni ise karşılaşacağımız neredeyse tüm üç eşitlik ve üç bilinmeyenli sistemlerin aynı yapıda olacak olmasıdır. İktisatta karşılaşılacak üç eşitlik ve üç bilinmeyenli çoğu sistemler genellikle ya

- İki davranışsal veya politika denklemi ve
- Bir denklem, optimizasyon ya da denge denklemi gibi bir yaklaşma kuralı uygulanarak çözümlenir.

Üç Eşitlik ve Üç Bilinmeyenli Denklem Sistemlerinin Çözüm Aşamaları

Bu tür 3-3'lük sistemlerin çözülmesi birkaç adımda gerçekleştirilir. Şimdi bu adımları sırasıyla örnekler vererek açıklayalım.

Adım 1: Davranışsal/politika içeren iki denklemi de yaklaşma koşulunda yerine koymak ve indirgenmiş form olarak elde etmek gerekir.

Öncelikle bilinmeyen değişkenleri q^s, q^d ve p şeklinde isimlendirelim.

Arz ve talep fonksiyonları ve piyasa denge koşulunun sırasıyla aşağıdaki şekilde verildiğini varsayalım.

$q^s = 28 + 5p$
$q^d = 100 - p$
$q^s = q^d$

Birinci adımı gerçekleştirmek için 3. Denklemde ifade edilen arz ve talep eşitliği koşulunu uygulamak yeterlidir.

$28 + 5p = 100 - p$

Bu sistemin sadeleşmesini ve bir anda 3-3'lük sistemden 1-1'lik sisteme dönüşmesine sebep olur. Buna "indirgenmiş form denklemi" denir.

Adım 2: Yukarıda 1. Adımda elde ettiğimiz indirgenmiş form denklemi sadece fiyat (p) değişkeninden oluşmaktadır. İkinci adımda, bilinenleri bir yanda ve bilinmeyenleri bir yanda toplayarak denklem sistemini çözme yoluna gideriz. Çözüm bize piyasa denge fiyatını,

$28 + 5p = 100 - p$
$5p + p = 100 - 28$
$6p = 72$
$p = 72/6$
$p^* = 12$

olarak verir.

Adım 3: Adım 2'de elde edilen fiyat (P) değerini davranış denklemlerinden birinde yerine koyup ve diğer değişken (denge miktar, Q) için çözüm yaparız. P değerini arz fonksiyonunda yerine koyarsak, q^s değerini,

$q^s = 28 + 5p$
$q^s = 28 + 5(12)$
$q^s = 28 + 60$
$q^s = 88$

olarak buluruz. Talep fonksiyonunda da aynı işlemi denemek mümkündü ve sonuç fark etmeyecekti.

Adım 4: İlk elde ettiğimiz (P) değerini bu sefer diğer davranışsal denklemde (talep fonksiyonunda) yerine koymak suretiyle yapmış olduğumuz işlemin sağlamasını (doğruluğunu) test ederiz. İşlem sonucunda q^d değeri,

$$q^d = 100 - p$$
$$q^d = 100 - 12$$
$$q^d = 88$$

olarak bulundu. Eğer $q^d = q^s = 88$ ise yapmış olduğumuz çözümleme doğrudur.

SIRA SİZDE 1

Arz, talep fonksiyonları ve piyasa denge koşulu aşağıdaki şekilde verilmiş ise yerine koyma metodu yardımıyla denge fiyat ve denge miktarı bulunuz.

$$Q^s = 20 + 6P$$
$$Q^d = 100 - 2P$$
$$Q^s = Q^d$$

Daha Fazla Eşitlik ve Daha Fazla Bilinmeyen

Dört bilinmeyenli ve dört denklemli bir makro denge sistemi aşağıdaki şekilde verilmiş olsun. Sistemde cari toplam tüketim (C) cari gelirin (Y) fonksiyonu olarak verilmiştir. Yatırım (I) ve kamu harcamaları (G) ise otonom harcamalar olarak verilmiştir. Toplam gelir ise toplam efektif talebin fonksiyonudur.

$$C = 500 + \frac{8}{10}Y$$
$$I = 300$$
$$G = 400$$
$$Y = C + I + G$$

Eğer iktisadi olarak sistem içindeki hangi denklemin denge koşulunu ifade ettiğini bilmiyorsak matematiksel olarak diğer tüm değişkenleri içerisinde barındıran denklem doğrudan veya dolaylı olarak denge koşuludur.

Sistemde dört bilinmeyen ve dört denklem mevcuttur: Bilinmeyenler; C, I, G ve Y'dir. Hangi denklemin denge koşulunu ifade ettiğini eğer iktisadi olarak bilmiyorsak, matematik kullanarak bu tahmini yapabilirsiniz: Diğer tüm değişkenleri içerisinde barındıran denklem doğrudan veya dolaylı olarak denge koşuludur. Bu durumda örnek sistemimizdeki denge koşulunu, Y = C + I + G, eşitliği ifade eder. Dolayısıyla çözüm 3-3'lük durumdaki çözüm gibi olacaktır. Şimdi adımlarla çözümü takip edelim.

Adım 1: Öncelikle, tüm davranış ve politika denklemlerini, yaklaşma koşulu denkleminde yerine koyup, indirgenmiş formu elde etmemiz gerekir. Bu bağlamda sistemdeki ilk üç tüketim, yatırım ve kamu harcamaları (C, I ve G) davranış ya da politika denklemleridir. Son denklemde bunları yerine koymak durumunda,

$$Y = 500 + \frac{8}{10}Y + 300 + 400$$

gelir denklemini ifade ederiz. Bu indirgenmiş form denklemidir.

Adım 2: İkinci aşamada, elde etmiş olduğumuz indirgenmiş formu, formdaki değişken (Y) için çözmemiz gerekir. Sadeleştirip, bilinmeyenleri bir tarafa, bilinenleri de diğer tarafa alma sonucunda,

$$Y = 1200 + \frac{8}{10}Y$$

$$Y - \frac{8}{10} Y = 1200$$

$$(10/10)\ Y - \frac{8}{10} Y = 1200$$

$$\frac{2}{10} Y = 1200$$

$$Y = (10/2)*1200$$
$$Y = 5*(1200)$$
$$Y = 6000$$

sonucuna ulaşırız. Şimdi öteki değişkenleri bulmak kolay olacaktır.

Adım 3: Y değerini bildiğimize göre bu değeri diğer tüm davranış/politika denklemlerinde yerine koyup ve diğer değişkenler için çözüm yaparız.

Y değerini tüketim fonksiyonunda yerine koymamız durumunda, tüketim

$$C = 500 + \frac{8}{10} 6000$$

$$C = 500 + 4800$$
$$C = 5300$$

olarak hesaplanır.

Yatırım ve kamu harcamaları gelirin fonksiyonu olmadığından hesaplanması gerekmez ve I = 300 ve G = 400 olarak hesaplanır.

Dolayısıyla çözümümüz (C, I, G, Y) = (5300, 300, 400, 6000) olacaktır.

Adım 4: Son adım çözülen değişken değerlerini indirgenmiş form denkleminde yerine koyarak cevapları kontrol etmektir. İşlem sonucunda,

$$C + I + G = Y$$
$$5300 + 300 + 400 = 6000$$
$$6000 = 6000$$

Sağlama yapılmış olur.

Daha Fazla Örnek Çözüm

Sistem denkleminin aşağıdaki şekilde verilmesi durumunda çözüm karmaşık görülse de aynıdır.

$$T = \frac{1}{10} Y$$

$$C = 5000 + \frac{9}{10} (Y - T)$$

$$I = 18000$$
$$G = 15000$$
$$Y = C + I + G$$

Sisteme dikkatli bakılması durumunda bütün bilinmeyenleri içeren denklem tüketim (C) fonksiyonudur ve tüketim fonksiyonu (C) denge koşulunu ifade eder.

Adım 1: Bütün davranış/politika denklemlerini yaklaşma kuralında yerine koyup ve indirgenmiş formu elde edelim.

$$Y = 5000 + \frac{9}{10} (Y - \frac{1}{10} Y) + 18000 + 15000$$

Adım 2: İndirgenmiş formu sadeleştirip gelir (Y) için çözelim.

$$Y = 5000 + \frac{9}{10}Y - (9/10)(1/10)Y + 33000$$

$$Y = 38000 + \frac{9}{10}Y - \frac{9}{100}Y$$

$$Y = 38000 + \frac{90}{100}Y - \frac{9}{100}Y$$

$$Y = 38000 + \frac{90}{100}Y$$

$$Y - \frac{90}{100}Y = 38000$$

$$\frac{100}{100}Y - \frac{90}{100}Y = 38000$$

$$\frac{19}{100}Y = 38000$$

$$Y = 38000(100/19)$$
$$Y = 200{,}000$$

Bu bize Y değerini verir.

Adım 3: Y değerini diğer tüm davranış/politika denklemlerinde yerine koyup ve diğer değişkenler için çözüm yapalım.

$$T = \frac{1}{10}(200{,}000)$$

$$T = 20{,}000$$

$$C = 5000 + \frac{9}{10}(200{,}000 - 20{,}000)$$

$$C = 5000 + \frac{9}{10}(180{,}000)$$

$$C = 5000 + 162000$$

$$C = 167{,}000$$

$$I = 18{,}000$$

$$G = 15{,}000$$

Bu çözümleme bütün değişkenler için çözüm sonucunu verir.

Adım 4: Bütün çözülen değişkenleri indirgenmiş form denkleminde yerine koyup eşitliği kontrol etmek suretiyle cevaplarımızın sağlamasını yapalım.

$$Y = C + I + G$$
$$200{,}000 = 167{,}000 + 18{,}000 + 15{,}000$$
$$200{,}000 = 200{,}000$$

Sonuç yaptığımız işlemin doğruluğunu ifade eder.

Eleme Metodu

Doğrusal denklem sistemini çözebilmenin 3. yolu eleme metodunu uygulamaktır. Eleme metodunda verilen denklem sistemindeki bilinmeyenlerden x veya y'nin elenmesi yoluna başvurulur. Bunu yapabilmek için ise (örneğin x'i elemek için) iki aşamalı bir yol izlenir. Öncelikle, sistemdeki birinci denklem ikinci denklemdeki x'in katsayısıyla ve ikinci denklem ise birinci denklemdeki x'in katsayısıyla çarpılır. Daha sonra ise çarpımlar sonucu elde edilen ilk denklemden ikinci denklem çıkartılır.

Yine aynı denklem sistemini kullanalım ve sistemdeki denklemlerden x'i eleyelim. Bunun için öncelikle birinci denklemi ikinci denklemdeki x'in katsayısı olan 4 ile ve ikinci denklemi ise birinci denklemdeki x'in katsayısı olan 5 ile çarpmamız gerekir.

$5x + 7y = 50 \mid * 4$
$4x - 6y = -18 \mid * 5$

İşlemler sonucunda denklem sistemi aşağıdaki şekle dönüşür.

$20x + 28y = 200$
$20x - 30y = -90$

İkinci aşamada ise ilk denklemden ikinci denklemin çıkartılması işlemi yapılır.

$20x + 28y = 200$
$20x - 30y = -90 \mid -$

Çıkartma işlemi neticesinde

$0 + 28y - (- 30y) = 200 - (-90)$
$58y = 290$

değeri bulunur. Ve y için çözümü 5 değerini verir.

$\mathbf{y} = 290/58 = \mathbf{5}$

y değerini bulduktan sonra x'i bulmak için ilk denklemlerden biri kullanılır ve y yerine bulunan 5 değeri ikame edilir.

$5x + 7y = 50$
$5x + 35 = 50$
$5x = 15$
$\mathbf{x = 3}$

Dolayısıyla sistem için çözüm eleme metodunda da yine, x = 3, y = 5'tir.

İlk önce x değişkenini elemek yerine y değişkeni de elenebilirdi ve çözüm yolu yine aynı olur ve elde edilen x ve y değerleri değişmezdi. Y değişkeninin elenmesi durumunda ise,

$5x + 7y = 50 \mid x\ 6$
$4x - 6y = - 18 \mid x\ 7$
$30x + 42\ y = 300$
$28x - 42y = - 126 \mid +$
$x = 3$

değeri bulunur. Sistemdeki denklemlerde x yerine 3 değerinin ikame y değerini 5 olarak verecektir.

SIRA SİZDE 2

Eleme metoduna göre eşanlı denklem sisteminin aşamalarını nasıl sıralarsınız?

Eşzamanlı Denklemlerde Çözümün Varlığı ve Tekliği

Aşağıdaki şekilde genel formda ifade edilmiş doğrusal eşzamanlı denklemler sistemi,

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

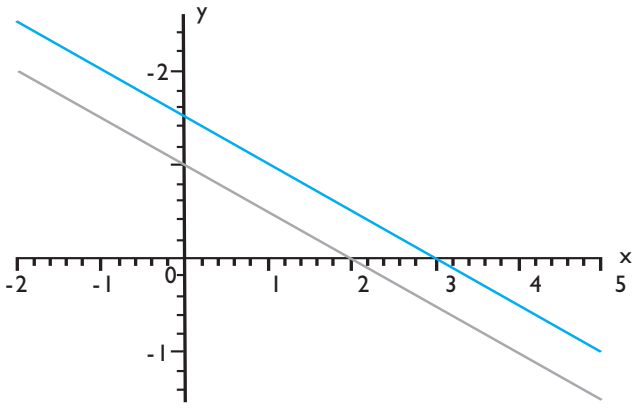
sıfır (çözümsüz), sadece bir ya da sonsuz (çok sayıda) çözümlü olabilir. Ortaya çıkabilecek bu durumları görebilmek için, her iki denklemi de eğim- kesişim formunda y cinsinden ifade edelim (Burada b ve d katsayılarının sıfır olmadığı varsayılmıştır).

$$y = c/b - a/b\ x$$
$$y = f/d - c/d\ x$$

Eğer bu iki doğrusal denklemin eğimleri eşitse bunlar özdeş veya paralel doğruları tanımlarlar. Örneğin a/b = c/d ise eğimler özdeş (eş)tir ki o zaman katsayılar matrisinin determinantı olan (ad - cb) sıfırdır. Ayrıca kesişimler eşitse her iki denklem de aynı doğruyu tanımlar. Bu durumda doğru üzerindeki bütün noktalar (x,y) çözüm durumunu ifade eder. Eğer kesişimler farklıysa bu durumda iki denklem birbirine paralel doğruları tanımlar. Bu paralel doğrular kesişmezler ve bundan dolayı çözüm kümesi yoktur.

Grafik 4.2

Paralel Fonksiyonların ve Çözümün Yokluğu



Örnek olarak aşağıdaki denklem sistemini kullanalım.

$$x + 2y = 3$$
$$2x + 4y = 4$$

Örnekte verilen denklem sisteminin çözümü yoktur. Eğim- kesişim formunda ifade edilen iki doğru olan,

$$y = 3/2 - \frac{1}{2}x$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}x$$

fonksiyonları Grafik 4.2'de görüldüğü gibi birbirlerine paraleldir ve aşağıdaki çözümde görüldüğü gibi ortak bir çözüm kümesi yoktur.

$$3/2 - \frac{1}{2}x = y = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x$$

$$\mathbf{3/2 = 1}$$

Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Denklem Sistemleri ve Çözümler

Varsayalım ki denklem sistemimiz aşağıdaki örnekte verilen doğrusal ve doğrusal olmayan iki denklemden oluşsun.

$$y^2 + x - 1 = 0$$

$$y + \frac{1}{2}x = 1$$

Böyle bir durumda, doğrusal olan denklemi x veya y değişkenlerinden biri için çözeriz ve sonucu doğrusal olmayan denklemde yerine koyarız. Sonuçta elde edilen denklem tek bilinmeyenli doğrusal olmayan bir denklemdir. Örneği x için çözelim. Doğrusal denklemi x için çözmemiz sonucunda, x değeri;

$$\frac{1}{2}x = 1 - y$$

$$x = 2 - 2y$$

olarak bulunur. Şimdi bulunan x değerinin doğrusal olmayan fonksiyonda yerine konulması gerekir. Yerine koyma işlemi sonucunda;

$$y^2 + (2 - 2y) - 1 = y^2 - 2y + 1 = (y - 1)2 = 0$$

Böylece tek bir çözüm vardır, $y^* = 1$ ve $x^* = 2 - (2 * 1) = 0$

DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİNİN EKONOMİK UYGULAMALARI

Arz ve Talep Modeli

Arz ve talep modeli tüketici ve üretici davranışlarının fiyat değişmeleri karşısında nasıl etkilendiğini ortaya koyar.

Talep

Her ne kadar bir malın talep edilecek miktarını belirleyen en önemli faktör o malın fiyatı ise de genel olarak, piyasada veri bir zamanda bir malın talep edilen miktarını o malın fiyatı, tüketicilerin gelirleri, ilgili malların fiyatlarındaki değişmeler, tüketicilerin zevk ve tercihleri ve tüketicilerin beklentileri gibi birçok faktör etkiler.

Örneğin, Coca-Cola'nın fiyatı sabitken, Pepsi-Cola fiyatı artarsa; bu iki malın birbirine yakın ikame mallar olduğunu düşünen bazı tüketiciler daha fazla Coca-Cola tüketmeye başlayabilir.

- Talep fonksiyonu kavramı, tüketici teorisine dayanır. Diğer faktörler veri iken (Ceteris-Paribus), bir malın fiyatı azaldıkça tüketiciler o maldan daha fazla miktarda almak isterler.
- Veri fiyatlardan bütün bireysel talep miktarlarını topladığımızda bize piyasa talebini verir. Talep fonksiyonu, talep edilen mal miktarını fiyatın ters fonksiyonu olarak ifade eder ve aşağıdaki şekilde ifade edilir.

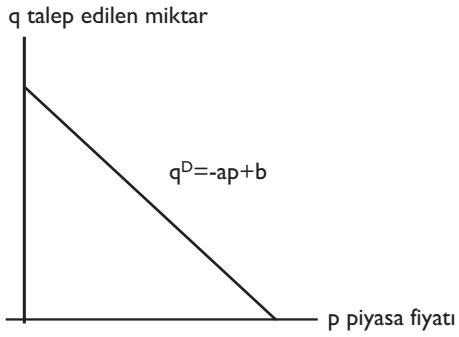
  $$q^D = -ap + b,$$

  Fonksiyonda; q^D talep edilen mal miktarını, p piyasa fiyatını ifade eder ve a ve b pozitif parametrelerdir.
- Talep eğrisi (doğrusu) negatif eğimlidir. Malın fiyatı arttıkça o malın talep edilen miktarı azalır veya malın fiyatı azaldıkça o malın talep edilen miktarı

artar. Fiyatla talep edilen mal miktarı arasındaki bu ters yönlü ilişki "Talep Kanunu" olarak bilinir.

Grafik 4.3

Negatif Eğimli Talep Eğrisi



- Talep edilen mal miktarı (q^D) bağımlı değişkendir ve her birey için piyasa fiyatı (p) bireyin o fiyattan ne kadar o malı alacağını gösteren veri olarak kabul edilir.

Talep Eğrisi (Doğrusu)

Y (dikey) eksenine talep edilen miktarı (q) ve x (yatay) eksenine malın fiyatını (p) koymamız durumunda talep eğrisi yandaki Grafik 4.3'teki gibi çizilir ve talep kanununu yansıtacak şekilde negatif eğimlidir.

DİKKAT

Geleneksel olarak, iktisat ders kitaplarında Y (dikey) eksenine fiyat (p) ve X (yatay) eksenine talep edilen miktar (q) konularak talep eğrisi çizilir.

Arz

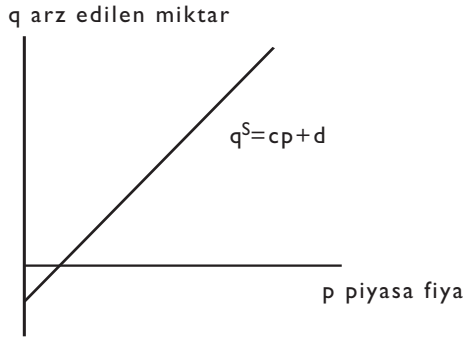
- Arz fonksiyonu kavramı firma teorisine dayanır ve üreticilerin farklı fiyatlardan üretipte piyasaya getirmeye razı oldukları üretim miktarlarını ifade eder. Üreticilerin ne kadar miktarda mal arz edecekleri malın fiyatı, girdi fiyatları (maliyetleri), teknolojik değişmeler ve üretici beklentileri gibi faktörlerden etkilenir. Diğer faktörler sabit iken, bir malın piyasa fiyatı arttıkça firmalar o maldan arz etmek istedikleri miktarlarını artırma yolunu seçecektir.
- Farklı fiyatlardan bütün firmaların arz miktarlarının toplamı bize piyasa arz miktarını verir. Arz edilecek mal miktarı fiyatın doğrusal fonksiyonudur ve fiyat arttıkça arz edilen mal miktarı da artar, vice-versa. Bu ilişkiye "arz kanunu" denir.
- Arz fonksiyonu,

  $q^S = cp + d$,

  şeklinde ifade edilir ve q^S arz edilen mal miktarını ifade eder. Fonksiyonda, $c > 0$.
- Arz eğrisi (doğrusu) pozitif eğimlidir. Bir malın fiyatı arttıkça o maldan arz edilen miktar artar. (Arz Kanunu)

Grafik 4.4

Arz Eğrisi



- Arz foksiyonunda, arz edilen miktar (q^S) bağımlı değişken ve fiyat (p) ise bağımsız değişkendir.

Arz Eğrisi

Arz eğrisi (doğrusu) diğer faktörler veri iken fiyatla arz edilen miktar arasındaki doğrusal ilişkiyi gösterir. Y (dikey) eksenine arz edilen miktarı (q) ve X (yatay) eksenine malın fiyatını (p) koymamız durumunda arz eğrisi yanda Grafik 4.4'teki gibi çizilir ve arz kanununu yansıtacak şekilde pozitif eğimlidir.

Geleneksel olarak, iktisat ders kitaplarında Y (dikey) eksenine fiyat (p) ve X (yatay) eksenine arz edilen miktar (q) konularak pozitif eğimli arz eğrisi çizilir.

DİKKAT

Arz, Talep ve Piyasa Dengesi

- Piyasa dengesi, tüketicilerin almaya gönüllü olduğu mal miktarı ile üreticilerin satmak için gönüllü olduğu mal miktarının eşit olduğu durumu ifade eder. Piyasa denge koşulu;

  $q^D = q^S$

  olarak ifade edilir. Piyasada arz ve talep edilecek mal miktarlarını eşitleyecek tek bir fiyat düzeyi vardır ve bu fiyata "piyasa denge fiyatı" veya "piyasayı temizleyen fiyat" denir.
- Eğer $q^D > q^S$ ise piyasada denge yoktur yani piyasada tüketiciler firmalar tarafından arz edilen miktardan daha fazla miktarda mal satın almak istiyorlardır. Bu ancak fiyatın denge fiyatından küçük olması durumunda söz konusu olabilir.
- Eğer $q^D < q^S$ ise piyasada üreticiler tüketiciler tarafından talep edilen miktardan daha fazla miktarda mal arz etmek istiyorlardır. Bu ancak fiyatın denge fiyatından büyük olması durumunda söz konusu olabilir. Yani piyasada bir dengesizlik vardır.

Piyasa denge durumunu bir örnek yardımıyla çözelim. Varsayınız ki bir mal (kullandığınız Matematiksel İktisat Kitabı) için talep fonksiyonu (talep edilen miktar (Q) ve fiyat (P) arasındaki negatif yönlü ilişkiyi temsil edecek şekilde),

$q^D = 40 - 2p$

ve arz fonksiyonu da

$q^S = 3p - 10$

olarak verilsin. Veri fonksiyonlardan piyasa denge fiyat ve miktarını bulalım.

Piyasa denge koşulu, $q^D = q^S$'dir.

Bu bir üç doğrusal denklemli ve üç bilinmeyenli (q^D, q^S, p) bir sistemdir. Denge çözümü için öncelikle arz ve talep fonksiyonları eşitlik olarak yazılıp bu eşitlikte bilinen ve bilinmeyenler ayrı taraflara çekildiğinde,

$40 - 2p = 3p - 10,$

Denge fiyat, $p^* = 10$ olarak bulunur.

Bu sonucu (p değerini) denklemlerden (fonksiyonlardan) birinde yerine koyarsak (örneğin arz fonksiyonunda) denge miktarı buluruz. İşlem sonucu denge miktar, $q^* = 3\ (10) - 10 = 20$'dir.

Dengede arz edilen mal miktarı talep edilen mal miktarına eşit olduğundan bulmuş olduğumuz denge miktar aynı zamanda denge talep miktarıdır.

DİKKAT

Piyasa Dengesinin Grafiksel Gösterimi

Denge durumunu grafik olarak ifade edebilmek için öncelikle piyasa arz ve talep fonksiyonlarının çizilmesi gerekir. Bunun için, verilen doğrusal fonksiyonların Y ve X eksenlerini hangi noktalardan kestiğini hesaplamak gereklidir.

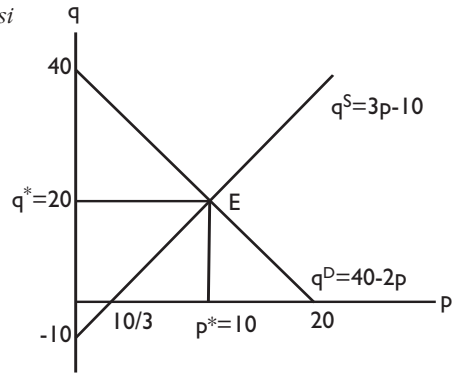
İşlemi öncelikle talep fonksiyonu için yapalım.

Talep fonksiyonu, $q^D = 40 - 2p$ olarak verildiğinden;

$q^D = 0$ iken, $p = 20$'dir.

Grafik 4.5

Piyasa Dengesi



Bu değer talep eğrisinin yatay (p) ekseni keseceği noktayı ifade eder.

$P = 0$ iken, $q^D = 40$'tır.

Bu değer talep eğrisinin dikey (q) ekseni keseceği noktayı ifade eder. Grafik 4.5'te 20 ve 40 değerleri talep eğrisinin yatay ve dikey eksenleri kestiği noktaları ifade etmektedir.

Arz eğrisini çizmek için ise benzer işlemi tekrarlamak gerekir. Arz fonksiyonu, $q^S = 3p - 10$ olarak ifade edildiğinden ve pozitif eğimli olduğundan,

$P = 0$ iken, $q^S = -10$'dur.

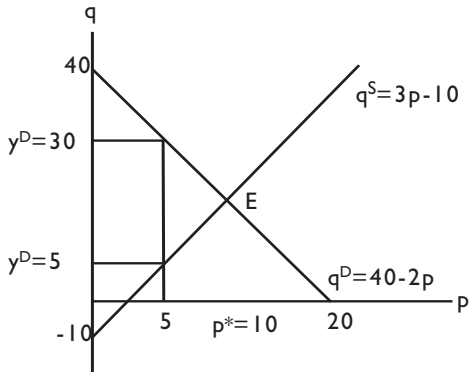
Bu arz eğrisinin başlangıç noktasını ifade eder.

$q^S = 0$ iken ise, $P = 10/3$'tür.

Bu değerler Grafik 4.5'te görülmektedir. Denge grafikte E noktasında arz ve talep fonksiyonlarının kesiştiği noktada ifade edilmiştir ve bu noktadaki piyasa denge fiyatı daha önce hesaplandığı gibi 10 (₺) ve denge miktar ise 20'dir (birim).

Grafik 4.6

Piyasada Dengesizlik Durumu ($q^D > q^s$)



Dengesizlik Durumu ($q^D > q^S$)

Piyasa fiyatının denge fiyatın (₺10) altında olması durumunda (örneğin ₺5) talep edilen mal miktarı (30 Birim) arz edilen mal miktarından (5 Birim) fazla olacak ve piyasada talep fazlalığından dolayı denge söz konusu olmayacaktır. Bu dengesizlik durumu aşağıdaki Grafik 4.6'da "Talep Fazlası" olarak ifade edilmiştir.

SIRA SİZDE 3

Piyasada Dengesizlik durumu ne ifade eder ve hangi durumlarda gerçekleşir?

KARŞILAŞTIRMALI STATİK DENGE ANALİZİ

Yukarıda verdiğimiz örnekte piyasa dengesi diğer faktörlerde değişme söz konusu değilken durağan ve tektir. Ancak piyasa koşullarında değişmeler her zaman söz konusu olur ve bu değişmelerin dengeyi (denge fiyat ve denge miktar) nasıl değiştirdiği araştırılmalı ve analiz edilmelidir.

Piyasa koşullarında, örneğin, alıcıların gelirleri veya üretim teknolojisi değişebilir ya da piyasaya vergiler yoluyla kamu müdahalesi olabilir. Sistemde gerçekleşen şokların yol açtığı yeni oluşan dengeyi ilk denge karşılaştırmak için temel düşünce "Karşılaştırmalı Statik Denge Analizi"dir.

Piyasa dengesinin şoklar sonucu nasıl değiştiğini şimdi Karşılaştırmalı Statik Denge Analizi ile Örnekler yardımıyla açıklayalım.

Tüketici Gelirinin Artması ve Dengenin Değişmesi

Varsayalım ki Matematiksel İktisat kitabı için talep şimdi sadece fiyat değil de aynı zamanda fiyat (P) ve gelirin (I) bir fonksiyonu olarak aşağıdaki şekilde verilsin:

$q^{D'} = -2P + 40 + I$

Kitabın arz fonksiyonu ise hâlâ eskisi gibi,

$q^S = 3P - 10$ olsun.

Piyasa Denge koşulu yine

$q^{D'} = q^S$ olacaktır ve

$40 - 2P + I = 3P - 10,$

P için çözülmesi durumunda,

$P = 10 + \frac{I}{5}$ değeri bulunacaktır.

Eğer gelir, I = 50 ise bu durumda denge fiyat ve miktar,

$P^* = 20$ ve $q^* = 50$

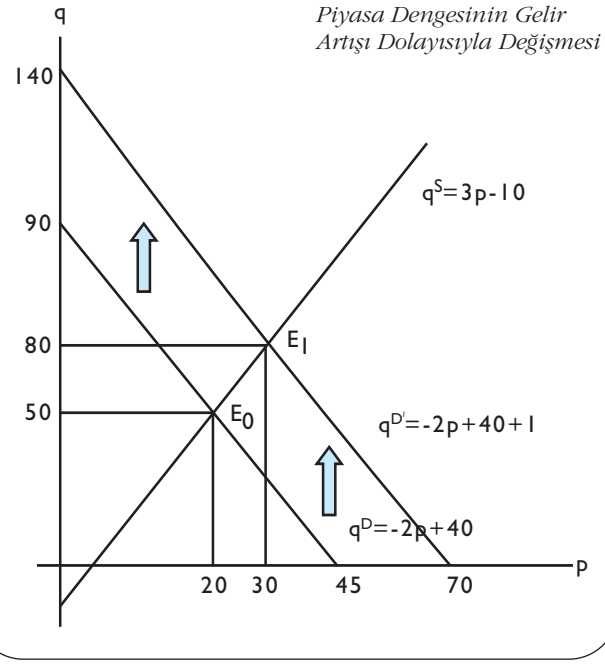
olarak bulunur.

Şimdi varsayalım ki gelir ₺50'den ₺100'ye yükselsin. Gelirdeki ₺50'lik artış piyasa talebinin artması nedeniyle piyasa denge fiyatının ₺20'sinden ₺30'sine ve denge miktarının da 50 birimden 80 birime çıkarak, denge miktarın 30 birim, fiyatların da 10 birim (₺) arttığını gösterir.

Grafik 4.7 gelirin 50 ve ₺100 olması durumundaki talep fonksiyonlarını ve piyasa denge durumunu göstermektedir. Grafikte iki talep eğrisinin birbirine paralel olduğu fakat yeni talep eğrisinin orijinal halinden yukarıya (sağa) doğru kaydığını görürüz. Bu bize diğer faktörler sabit iken, gelirdeki artışların normal mallar için veri fiyatlardan talebin artmasına sebep olduğunu ve talep fonksiyonunu sağa kaydırdığını gösterir.

Grafik 4.7

Piyasa Dengesinin Gelir Artışı Dolayısıyla Değişmesi



Vergi Politikası ve Piyasa Dengesinin Değişmesi

Kırmızı et için talep ve arz fonksiyonları sırasıyla

$q^D = -7p + 1000$
$q^S = 5p - 200$

olarak verilmiş olsun.

Piyasa Denge koşulu, $q^D = q^S$ olduğundan, çözüm sonucunda denge fiyat ve denge miktar sırasıyla,

$p^* = 100$ ve $q^* = 300$ olarak bulunur.

Kırmızı et piyasası böyle bir dengedeyken, varsayınız ki hükümet sağlıklı beslenmeyi teşvik amacıyla satılan her kilo için t liralık vergi koymuş ve bu vergiyi de et satıcıları (üreticilerine) yüklemiş olsun.

Yine varsayalım ki, t = 25. Bu durumda, vergi faturası etin fiyatına değil satılan et miktarına bağlıdır.

Vergi kime yüklenirse yüklensin;

- Piyasanın daralmasına,
- Üreticinin eline geçen fiyatla tüketicin ödeyeceği fiyat arasında bir farkın oluşmasına sebep olur.

Verginin etkisini analiz etmek için ilk önce piyasa fiyatı, p, ile satıcıların eline geçen fiyat, p', arasındaki ayrımın farkına varılmalıdır.

Verginin satıcılara yüklenmesi durumunda, p piyasa fiyatından ürününü satan satıcı, t lira kadar vergiyi devlete ödemek zorundadır ve bu yüzden sattığı her birimden piyasa fiyatı olan p değilde, $p' = p - t$ alır.

Bu durumda veri vergi koşulu altında, satıcıların arz etmeye gönüllü olduğu kırmızı et miktarı artık p ye değil p''ye bağlıdır.

Bu durumda vergi sonrası yeni arz fonksiyonunu,

$q^{S'} = 5p' - 200$ şeklindedir.

Vergi sonrası değişen ve oluşan (elde edilen) bütün denklemleri yeniden yazarsak,

$q^D = -7p + 1000$ (1)
$q^{S'} = 5p' - 200$ (2)
$q^D = q^{S'}$ (3)
$p' = p - t$ (4)
$t = 25$ (5)

Beş (5) denklemli ve beş (5) bilinmeyenli (q^D, $q^{S'}$, p, p', t) doğrusal bir denklem sistemi elde ederiz.

Bu denklem sistemini çözmek için önce denklem (5)'i denklem (4)'te yerine koyalım.

$p' = p - t = p - 25$ (4')

Daha sonra elde ettiğimiz denklem (4') 'ü denklem (2)'de yerine koyarsak vergi sonrası arz fonksiyonu ortaya çıkar.

$q^{S'} = 5(p - 25) - 200 = 5p - 125 - 200$ (2')

Denklem (2') de elde edilen vergi sonrası arz denklemi ile vergi öncesi arz fonksiyonunun, $q^S = 5p - 200$ eğimleri aynıdır. Bununla birlikte, veri bir fiyat düzeyinde ilk durumdaki vergi öncesi arz denkleminin vergi sonrası arz denkleminden, (2')'den daha büyük olduğunu görürüz. Yani vergi üreticiye yüklenmesi durumunda, arz fonksiyonunun azalmasına (aşağı doğru kaymasına) sebep olur.

Her iki arz fonksiyonun da grafikleri paralel ancak denklem (2') daha küçük bir y değerini almaktadır ve arz eğrisi aşağı doğru kaymıştır.

Vergi sonrası piyasa dengesini bulmak için $q^D = q^{S'}$ yapılması gerekir. Bu durumda ortaya çıkacak vergi sonrası denge fiyat (p), p = ₺110,4'dir. Bu fiyat vergi sonrası tüketici tarafından ödenen fiyattır. Vergi sonrası üreticinin eline geçen fiyat ise;

$p' = 110,4 - 25 =$ ₺85,4'dir.

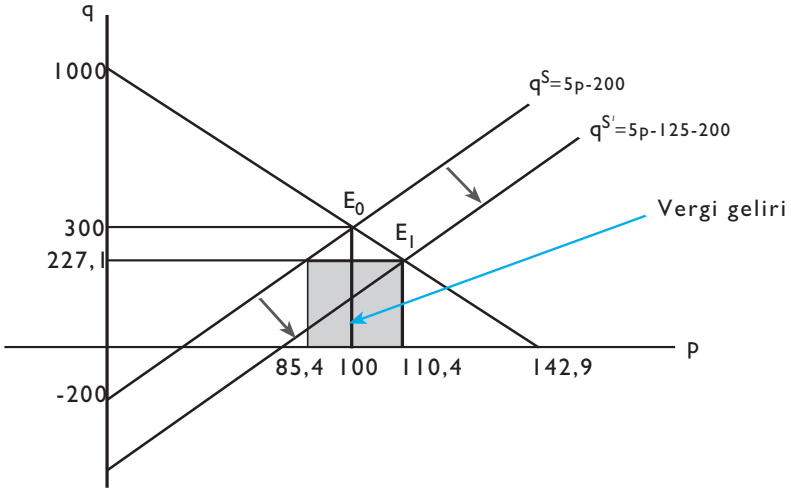
Vergi sonrası piyasa denge miktarı ise, C birimdir.

Vergi sonrası değerler incelendiği ve vergi olmadığı durumla karşılaştırıldığında;

- Verginin arz fonksiyonunu 125 birim aşağı kaydırdığı,
- Piyasa Denge Miktarını 300 birimden 227,1 birime düşürerek piyasayı daralttığını,
- Tüketicinin ödediği fiyatı (piyasa fiyatı) ₺110,4'ye artırarak, tüketicinin ödediği fiyat ile üreticinin eline geçen fiyat ($p' = 110,4 - 25 =$ ₺85,4) arasında bir fark yarattığı ve bu farkında vergi oranına eşit olduğunu,
- Vergi kime yüklenirse yüklensin bundan hem üretici ve hem de tüketicilerin olumsuz yönde etkilendiklerini,
- Devletin t * q* kadar vergi geliri elde ettiğini görürüz.

Grafik 4.8

Vergi Politikası ve Piyasa Dengesine Etkisi



Grafik 4.8'de gölgelendirilmiş alan devlete tahakkuk eden vergi gelirini göstermektedir ve örnekte q* = 227,1 çarpı vergi oranı t = ₺25'ye eşittir.

Piyasa dengesi hangi durumlarda ve nasıl değişir?

SIRA SİZDE 4

Doğrusal Denklemler ve Makroekonomik Denge

Makroekonomik teorinin ilgi alanı bir ekonominin bütünüdür. Ekonominin bütününde özellikle gelir seviyesinin nasıl belirlendiğini göstermenin bir yolu da doğrusal bir makroekonomik model kullanımıdır.

Modelin Anahtar İlişkisi

Bir ekonomide belli bir dönemde üretilen tüm mal ve hizmetlerin değeri (Q), ekonomik tüm birimlerin toplam üretim neticesinde elde ettikleri gelire (Y) ve bu gelirde ekonomideki tüm mal ve hizmetler için yapılan toplam harcamalara (E) eşit (denk) olmak zorundadır. Bu makroekonomik denklik,

$$Y \equiv Q \text{ ve } Q \equiv E$$

olarak ifade edilir. Yani ekonomide toplam üretim değeri toplam gelire ve toplam gelirde toplam harcamalara eşittir.

$$Y \equiv Q \text{ ve } Q \equiv E$$

denkliği bize

$$Y \equiv E \tag{1}$$

eşitliğini verir.

Eşitlik (1) aynı zamanda bir özdeşliktir, yani bir ekonomide veri bir zamanda toplam gelirle toplam harcama birbirine eşit olmalıdır.

Devletin olmadığı veya kamu harcamalarının sıfır olduğu kapalı bir ekonomide toplam harcamalar (E), ekonomik bireylerin tüketim harcamalarıyla (C), firmaların yatırım harcamalarını, (I), içerir.

$$E \equiv C + I \tag{2}$$

Ekonomik birimlerin planlanan ya da arzulanan tüketim harcamaları harcanabilir gelirin bir fonksiyonu olarak aşağıdaki tüketim fonksiyonu şeklinde ifade edilir.

$$\hat{C} = aY + b, \tag{3}$$

Eşitlik (3)'te $\hat{C}$, planlanan tüketimi; a ve b, pozitif parametrelerdir ve a parametresi sıfırdan büyük ve 1'den küçük değer alan Marjinal Tüketim Eğilimini (MPC) ifade eder. Pozitif eğimin anlamı ise harcanabilir gelir arttıkça, Y, tüketim ($\hat{C}$) artacağıdır. Spesifik bir tüketim fonksiyonun aşağıdaki şekilde verilmiş olduğunu varsayalım:

$$\hat{C} = 0.5Y + 200$$

Bu fonksiyonda MPC, 0.5'tir. Yani tüketici kazandığı ekstra her bir (1) ₺'nin yarısını harcayacak, kalan yarısını ise tasarruf edecektir.

Tasarruf gelirin harcanmayan kısmıdır ve planlanan tasarruf,

$$\hat{S} \equiv Y - \hat{C}$$

şeklinde ifade edilir.

Bu bir özdeşliktir. Çünkü gelirin tüketilmeyen kısmı ister istemez tasarruf edilecektir.

Yukarıdaki özdeşlikte planlanan tüketimi ($\hat{C}$) tasarruf fonksiyonunda yerine koyarsak:

$$\hat{S} = Y - (aY + b) = Y(1-a) - b$$

elde edilir.

Örneğimize göre tasarruf fonksiyonu şu şekilde olur:

$$\hat{S} = Y - (0,5Y + 200) = 0,5Y - 200$$

Görüldüğü üzere tüketim (C) ve planlanan (arzulanan) tüketim ($\hat{C}$) birbirine eşit değildir. C cari tüketim miktarı, $\hat{C}$ ise tüketicinin tüketmek istediği miktardır.

Cari tüketimin planlanan tüketime eşit olmadığı durumlarda, $C \neq \hat{C}$, aslında gelirdeki değişimlere neden olan harcamalardaki değişimler olacaktır.

Bu yüzden denge koşulu için,

$$C = \hat{C} \qquad (4)$$

eşitliğine ihtiyaç vardır.

Oluşturduğumuz dört (4) eşitlik bizim beş (5) bilinmeyenli (Y, E, I, C, $\hat{C}$) makroekonomik modelimizi ortaya koyar.

Elimizde eşitlik sayısından daha fazla bilinmeyen olduğu için, çözüm şekli tek değildir.

Denklem sisteminin çözümü için, toplam gelir toplam harcamalara eşit olduğundan, eşitlik (2)'deki harcamalar (E) yerine eşitlik (1)'deki geliri (Y) yazalım.

$$Y \equiv C + I \qquad (5)$$

Daha sonra (4). denklemi (5). denklemde yerine yazalım,

$$C = 0,5Y + 200 \qquad (6)$$

Ve elde etmiş olduğumuz (6). denklemi (5). denklemde yerine koyalım. Bu işlemler sonucunda gelir,

$$Y = 0,5Y + 200 + I,$$

şeklini alır. Yeniden düzenleyip geliri eşitliğin sol tarafına alırsak,

$$Y - 0,5Y = 200 + I$$

$$Y(1 - 0,5Y) = 200 + I$$

$$Y = \frac{200+I}{0,5} \qquad (7)$$

sonucuna ulaşırız. Bu (7). denklem bize gelirin (Y) yatırım harcamalarının (I) bir fonksiyonu olduğunu ifade eder.

Elde ettiğimiz gelir denklemin de iki tane bilinmeyen olduğu için, bunun tek bir çözümü yoktur.

Yedinci (7.) denklemin paydası (0.5), bir eksi marjinal tüketim eğilimine yani,

(1- MPC) = (1 - a)'ya eşittir.

Eğer a = 1 ise, payda sıfır değerini alacaktır. Eğer a > 1 ise, payda negatiftir. Bu nedenle MPC'nin sıfırla bir değeri arasında değerler alması arzulanır (a < 1).

Makroekonomik denge durumundaki denge reel geliri (Y) için belirli bir değer elde etmek istiyorsak, yatırım harcamaları (I) ile ilgili ilave bilgilere sahip olmalıyız.

Basitleştirmek için, varsayalım ki, yatırım harcamaları (I)'nın sabit bir değeri var ve I = 500 olsun. Bu durumda daha önce elde etmiş olduğumuz (7) no.lu denklemde bu değeri yerine koyarsak, denge gelir düzeyi;

$$Y = \frac{200+I}{0,5} = \frac{200+500}{0,5} = 1400$$

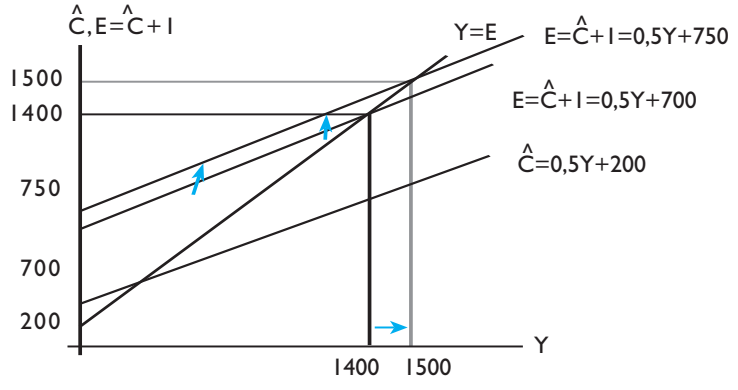
olarak bulunur. Bu değer denge gelir düzeyidir ve ekonomik birimlerin planlanan tüketim harcamaları ve firmaların yatırım harcamaları ekonominin bu tüketim ve yatırım mallarının fiili üretimi ile uyum içindedir.

Çözmüş olduğumuz modelde yatırım harcamaları (I) dışsal (ekzojen) bir değişken olarak kabul edilmiştir. Değerleri model içerisinde belirlenen değişkenler ise Y ve C gibi, içsel (endojen) değişkenlerdir.

Yukarıda çözümü gösterilen makro modelin grafiksel gösterimi aşağıdaki Grafik 4.9'dadır.

Grafik 4.9

Makroekonomik Denge Gelir Düzeyinin Gösterimi ve Dengenin Değişmesi



Karşılaştırmalı Durağanlık

Varsayalım ki yatırım harcamaları 500 birimden 550 birime yükseldi. Bu gelişme denge gelir düzeyinin yatırım harcamalarındaki artıştan daha fazla artmasına sebep olur.

$$Y = \frac{200+I}{0,5} = \frac{200+550}{0,5} = 1500$$

Yatırım harcamalarındaki 50 birimlik bir artış gelirde 100 birimlik bir artış sağlamıştır. Bu etkiye yatırım çarpan etkisi denir. Grafik 4.9'da görüldüğü gibi, yatırım harcamalarındaki bir artış toplam talep fonksiyonunda yukarı yönlü bir kaymaya neden olur, $E = \hat{C} + I$, ve denge gelir düzeyinin artışıyla sonuçlanır.

DOĞRUSAL İKTİSADİ MODELLERE İLİŞKİN ÖRNEK ÇÖZÜMLER

Piyasa Dengesinin Bulunması ile İlgili Örnekler

Bir piyasa için talep ve arz fonksiyonları sırasıyla,

$Q^D = 50 - P$
$Q^S = 20 + 2P$

şeklinde verilmiş olsun. Piyasa dengesi, $Q^S = Q^D$ eşitliğini sağlan fiyat (p) düzeyinde gerçekleşir. İşlem sonucunda,

$20 + 2P = 50 - P$

Denge fiyat, P = 10 ve denge miktar, Q = 40 olarak bulunur.

Piyasa denge durumunu genel form olarak ifade etmek istersek talep ve arz fonksiyonları sırasıyla,

$Q^D = a + bP$
$Q^S = c + dP$

ifade edilir ve piyasa denge fiyat ve miktarı ise

$$P = \frac{a-c}{d-b} \quad \text{ve} \quad Q = \frac{ad-bc}{d-b}$$

olarak ifade edilir.

Tüketim Vergileri ve Piyasa Dengesine Etkisi ile İlgili Örnekler

Eğer bir piyasada satışlar üzerinden üreticilerden (satıcılardan) devlet tarafından her birim için t kadar vergi alınıyorsa, yukarıdaki örnekte verilen piyasadaki arz ve talep fonksiyonları vergi sonrası aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$Q^D = 50 - P$
$Q^S = 20 + 2(P - t)$.

Bu koşullar altında vergi sonrası yeni piyasa denge fiyat ve miktarı ise

$$P = 10 + (\frac{2}{3})\, t$$

$$Q = 40 - (\frac{2}{3})\, t$$

şeklinde olur.

Bu eşitlikler t kadar verginin P ve Q denge değerlerini nasıl etkilediğini göstermektedir. Unutmayalım ki, tüketiciler tarafından ödenen fiyat (P), arz ediciler tarafından alınan fiyat (P - t)'ye eşit değildir, bu yüzden P fiyatının "tüketicilerin ödediği fiyat" olduğunu tekrar belirtelim.

Tüketim vergilerinin söz konusu olduğu durumda iki eşitliğimiz ancak üç değişkenimiz vardır (P, Q ve t). Bunun anlamı, her değişkenin çözümünü içlerinden biri ekzojen (dışsal) olarak verilmedikçe yapamayız. Yukarıda P ve Q, t'nin bir fonksiyonu olarak yazılmıştı. Bu durumda t değişirse piyasa dengesi de değişecektir- bu grafiksel olarak eğrilerden birinin kayması demektir. Vergilerdeki değişim-

lerden kaynaklanan denge değişimini incelemek karşılaştırmalı statik analiz olarak bilinmektedir.

Ulusal Gelirin Belirlenmesi ile İlgili Örnek

Bir ekonomide denge gelir düzeyinin (Y) bulunması istenmektedir ve toplam tüketim harcamaları toplam gelirin bir fonksiyonu olarak tüketim (C) fonksiyonu,

$$C = 1000 + 0{,}8Y$$

olarak verilmiştir. Toplam talep, tüketim talebinin ve yatırım talebinin toplamına eşittir. Denge gelir (Y) düzeyi, gelir ve toplam talep (C + I) eşitliği yardımıyla bulunabilir. Yatırımların otonom veya dışsal olduğu varsayımında toplam talep,

$Y = 1000 + 0{,}8Y + I$ olarak yazılır.

Geliri yatırım harcamalarının fonksiyonu yazmamız durumunda,

$$Y = 5000 + 5I$$

ve

$$C = 5000 + 4I$$

olarak yazılır. Örnekte, millî gelir-yatırım çarpanı 5'tir. Yatırım çarpanı yatırımlardaki bir birimlik değişmenin milli gelirde ne kadarlık değişiklik yaratacağını ifade eder.

Genel formda ifade etmek istersek tüketim fonksiyonu,

$$C = a + bY$$

olarak ifade edilir ve buradan denge gelir, denge tüketim düzeyi ve çarpan formları sırasıyla,

$$Y = \frac{a}{1-b} + \frac{I}{1-b}$$

$$C = \frac{a}{1-b} + \frac{bI}{1-b}$$

Ve çarpan = $\frac{1}{1\text{-}b}$ olur.

Özet

AMAÇ 1

Doğrusal denklem sistemlerinin çözüm metotlarını açıklamak ve uygulamak

İktisatta, eşanlı doğrusal denklem sistemlerini çözmek için sırasıyla Eğim-Kesişim Formunu Kullanma, İkame (Yerine Koyma) ve Eleme Metotlarından yararlanılır.

Eğim-Kesişim Formunu Kullanarak çözebilmek için öncelikle her iki doğrusal denklemi eğim-kesişim formunda yeniden yazmak gerekir. Sonra bilinmeyenlerden birini denklemin sol tarafına alıp, örneğin y, bu bilinmeyeni diğer bilinmeyen, x, cinsinden yazmak gerekir. Doğrusal iki fonksiyonun kesiştiği noktada y değerleri aynı olmalıdır. Bundan dolayı, y cinsinden yazılmış olan iki doğrusal fonksiyonun birbirine eşitlenmesi gerekir. Buradan bilinenlerle bilinmeyenleri bir tarafa almamız ve x değeri bulunur. x değeri bulunduktan sonra herhangi bir denklemde bu değeri yerine koyarak y değeri elde edilir.

İkame metodunda denklem sistemindeki doğrusal fonksiyonlardan biri alınır ve y veya x cinsinden yazılır. Diyelim ki y cinsinden yazılan fonksiyon daha sonra sistemdeki diğer fonksiyonda y görülen yer(ler)e ikame edilir ve x cinsinden ifade edilen tek bilinmeyenli bir denklem hâline dönüştürülür. x cinsinden değeri bulunur ve bu x değeri sonra ikame yoluyla y değerinin hesaplanmasında kullanılır.

Eleme metodunda verilen denklem sistemindeki bilinmeyenlerden x veya y'nin elenmesi yoluna başvurulur. Bunu yapabilmek için ise (örneğin x'i elemek için) iki aşamalı bir yol izlenir. Öncelikle, sistemdeki birinci denklem ikinci denklemdeki x'in katsayısıyla ve ikinci denklem ise birinci denklemdeki x'in katsayısıyla çarpılır. Daha sonra ise çarpımlar sonucu elde edilen ilk denklemden ikinci denklem çıkartılır. x değerini elememiz bize y değerini verir. y değerini bulduktan sonra x'i bulmak için ilk denklemlerden biri kullanılır ve y yerine bulunan değer ikame edilir.

AMAÇ 2

Özellikle ikame (yerine koyma) metoduyla sistem problemlerini çözmek

İkame metodunda denklem sistemindeki doğrusal fonksiyonlardan birisi alınır ve y veya x cinsinden yazılır. Diyelim ki y cinsinden yazılan fonksiyon daha sonra sistemdeki diğer fonksiyonda y görülen yer(ler)e ikame edilir ve x cinsinden ifade edilen tek bilinmeyenli bir denklem haline dönüştürülür. x cinsinden değeri bulunur ve bu x değeri sonra ikame yoluyla y değerinin hesaplanmasında kullanılır.

Bir eşitliği çözüp çözemeyeceğinizi belirleyebilmek için öncelikle eşitlikleri ve sonra da bilinmeyenleri (değişkenleri) saymamız gerekir. Eğer eşitlik sayısından daha fazla değişken varsa sistemi çözmek için yeterli ipucunuz yok demektir. Örneğin, $y = x + z$ ve $z = 5$ şeklinde iki eşitlik ve 3 değişkene sahipseniz, $y = x + 4$ olduğunu bilirsiniz ama bir eşitlik daha olmadan y veya x'i çözecek yeterli bilgiye sahip olamazsınız.

Diğer taraftan, eğer elinizde değişkenlerden daha fazla eşitlik varsa çok fazla ipucunuz var demektir. Örneğin, 4 eşitlik ve 3 bilinmeyene sahipseniz eşitliklerden bir tanesi ya tutarsız ya da bağımlı olacaktır.

Eşitlikleri saydıktan sonra kontrol etmemiz gerekir. Eşitliklerin, doğrusal, bağımsız ve tutarlı olmaları gereklidir. Bir eşitliğin doğrusal olması, kontrol edilen bütün eşitliklerin, $y = a + bx$, formatında olması ve formatın üs, kare, kök, xy veya x/y olmaması anlamına gelir. Doğrusallık özelliği, formattaki a veya b'nin 0 ya da 1 olduğu durumları da içerir ki böyle durumlarda $y = a$ ya da $y = x$ olur.

Eşitliğin bağımsız olması en iyi birbirinden bağımsız olmayan iki eşitlikle gösterilebilir. Örneğin, $y = x$ ve $2y = 2x$, denklemleri bağımsız değildir. Eğer birisi doğruysa öteki de doğru olmak zorundadır. Örnekteki denklemlerin gerçekte her ikisi de mükerrer yazılmış olan aynı fonksiyondur, dolayısıyla ikisini de denklem olarak sayamazsınız.

Eşitliğin "Tutarlı" olması aynı anda hem $y = x$ hem de $y = x + 2$ doğru olmaması anlamını taşır.

AMAÇ 3

İktisadi uygulamalarını yapmak

Eşanlı doğrusal denklem sistemleri iktisat teorisinde çok yaygın kullanım alanına sahiptir. Bu sistem çözümleri kullanılarak mikroekonomi alanında piyasa dengesinin belirlenmesi, dengenin değişmesinin karşılaştırmalı statik analiz yöntemiyle ortaya konulması, piyasa şartlarındaki ve vergi politikalarındaki değişmelerin dengeye etkilerinin analizi yapılır.

Makroekonomi alanında ise özellikle ekonominin genel denge gelir düzeyinin ve bu denge durumunda diğer bilinmeyenlerin örneğin tüketim, yatırım vb. tahmininin yapılması işlemlerinde kullanım alanı bulur.

MATEMATİKSEL İKTİSAT

5

Amaçlarımız

Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- Matris cebiri terminolojisi ile kullanılan notasyonları tanıyabilecek,
- Matrisleri toplayıp ve çıkarabilecek,
- Matrisleri bir sayı ve başka bir matris ile çarpabilecek,
- Bir matrisin determinantını ve tersini hesaplayabilecek,
- Ters matris, Gauss Yöntemi ve Cramer kuralı ile denklem sistemlerini çözebilecek

bilgi ve becerilere sahip olacaksınız.

Anahtar Kavramlar

- Vektör
- Matris
- Birim matris
- Kare matris
- Matrisin evriği
- Minör
- Kofaktör
- Determinant
- Ters matris
- Gauss Eleme Yöntemi
- Cramer Kuralı
- Doğrusal Denklem Sistemi

İçindekiler

Matematiksel İktisat → Matrisler ve Denklem Sistemlerinin Matrislerle Çözümü →

- GİRİŞ
- MATRİSLERLE İLGİLİ TANIMLAR VE TERİMLER
- TEMEL MATRİS İŞLEMLERİ
- TERS MATRİSİN BULUNMASI
- DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Matrisler ve Denklem Sistemlerinin Matrislerle Çözümü

GİRİŞ

Birçok iktisadi modelde, birçok değişkenin eşanlı olarak etkileşimi söz konusudur. Örneğin, emek ve sermaye gibi iki girdi kullanan ve kârını maksimize etmeye çalışan bir firma durumunda, karşılaştırmalı statik analiz yapabilmek için iki tane eşanlı doğrusal eşitliğin çözümü gerekmektedir. Aslında bu durum n değişkenin yer aldığı n tane doğrusal eşitlikten oluşan denklem sistemleri için de geçerlidir. Bu denklem sistemlerinin çözümü de bir şekilde matrislerin ve matrislerle ilgili belirli işlemlerin yapılmasını gerektirir. Aslında iktisadın çeşitli alanlarında matrisler yoğun bir biçimde kullanılmaktadır. Matris işlemleri sayesinde iktisadi modelleri analiz etmek hem daha basittir hem de bu modellerle ilgili daha ayrıntılı bilgi elde etme şansımız vardır. Matrisleri kullanarak bir verideki tek tek gözlemler yerine, verinin tümüyle ilgilenebiliriz. Matrisler özellikle doğrusal denklem sistemleri sözkonusu olduğunda çok yararlı ve güçlü bir araçtır. İktisatta da birçok teorik model ya doğrusaldır ya da bazı basit işemlerle, örneğin logaritmik dönüşüm uygulayarak, doğrusal hâle getirilebilir. Matrisler sayesinde çok karmaşık gibi görünen denklem sistemleri basit ve oldukça açık bir biçimde ifade edebilir; eşanlı doğrusal denklem sistemlerinin çözümünün olup olmadığını çözmeye başlamadan belirleyebilir ve nihayet bu denklem sistemlerini çözebiliriz. Bu bağlamda matislerle ilişkili determinantları kullanarak, sistemin tek bir çözümü olup olmadığını belirleyebiliriz. Ayrıca modern iktisadi analizlerde yoğun olarak kullanılan Cramer kuralı ile bir eşitlikte yer alan bilinmeyen bir katsayı için, eşitliklerde yer alan diğer katsayılar cinsinden çözüm bulabiliriz.

DİKKAT

$Q = AK^{\alpha} L^{\beta}$ biçimindeki doğrusal olmayan Cobb - Douglas üretim fonsiyonunun her iki tarafının logaritması alınarak, yani $\log Q = \log A + \alpha \log K + \beta \log L$ biçiminde yeniden yazılarak, doğrusal hâle getirilir.

MATRİSLERLE İLGİLİ TANIMLAR VE TERİMLER

Matrisleri tanımlayabilmek ve iktisatta nasıl kullanıldıklarını açıklayabilmek için öncelikle iki eşitlik ve iki bilinmeyenden (x_1 ve x_2) oluşan aşağıdaki denklem sistemini göz önüne alalım.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Bu denklem sisteminin sol tarafı, iki satır ve iki sütundan oluştuğu için, iki eşitlik ve iki bilinmeyen değişkenden oluşan bu sistem, bir kare sistemdir. Herbir değişkene ait katsayı için iki tane indis kullanılmıştır. Bu sayede bu sayıları rahatlıkla ayırdedebiliriz. Örneğin a_{12}, birinci satır ve ikinci sütunda gözükmektedir. Eşitlik sisteminde her değişkenin pozisyonu kendi katsayısı ile endekslenmiştir. Bu anlamda a_{12}, birinci satır, ikinci sütundaki değişkenin katsayısı olmaktadır.

m tane doğrusal eşitlik ve n tane bilinmeyen değişkenden (x'ler) oluşan denklem sistemi ise,

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

biçiminde yazılır. Bu denklem sisteminde i ninci satır ve j ninci sütunda yer alan değişkenin katsayısı a_{ij} dir.

A, sistemin katsayı matrisini temsil etsin:

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{mxn}
$$

Ayrıca çözüm vektörü ile sabit terimler vektörü sırasıyla,

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{ve} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

olduğunda; yukarıdaki denklem sistemi, matris formu ile aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

Matris: Bir köşeli büyük parantez içinde satır ve sütunlara yazılı sayı, değişken veya fonksiyonları temsil eden elemanlardan oluşan dikdörtgen biçiminde bir tablodur.

Buradaki sistemde m tane satırı ve n tane sütunu olan bir matris, m tane satırı ve 1 tane sütunu olan bir başka matris (vektör) ile çarpılarak sağ taraftaki m tane satırı ve 1 tane sütunu olan bir başka matris oluşturmuştur. Yani, a_{ij} (i = 1, 2, ... , m; j = 1, 2, ... , n) katsayılarının yer aldığı matris ile x değişkenlerinin yer aldığı vektör çarpılarak, b'lerin yer aldığı bir vektör elde edilmiştir.

Burada sözünü ettiğimiz matris, **köşeli büyük bir parantez içinde satır ve sütunlara yazılı sayı, değişken veya fonksiyonları temsil eden elemanlardan oluşan dikdörtgen biçiminde bir tablodur.** Bir matris, bir veri setinin doğal yorumu olan, sütunlar seti ya da satırlar seti olarak da düşünülebilir (Tablo 5.1'e bakınız). Matris, ya $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ ya da $[\mathbf{A}]_{ij}$ biçiminde gösterilir. a_{ij} (i = 1, 2, ... , m; j = 1, 2, ... , n) sayıları, **A** matrisinin girdileridir. Satır ve sütun sayıları matrisin boyutu olarak adlandırılır. **A** matrisinin boyutu mxn'dir. 1×1 boyutundaki bir matris 5, 10 gibi bir sayı iken, $m \times 1$ boyutundaki matris bir sütun vektörü; $1 \times n$ boyutundaki matris ise bir satır vektörü olarak adlandırılır.

Matrisler oluşturulurken ya büyük köşeli parantez ya da sadece parantez kullanılır. Biz bu ünitede köşeli parantez kullanmayı tercih etmekteyiz. Ayrıca matrisleri ifade ederken büyük kalın harfler kullanacağız, örneğin *A* gibi. Matrisin boyutu yazılırken önce satır sayısı sonra sütun sayısı yazılır.

DİKKAT

Kendi uzay vektöründe bir vektör olan ve satır ve sütundaki elemanların reel veya karmaşık sayı olabileceği matrislerin sayısal bir değeri yoktur. Her matrisin her satırı ve sütunu birer vektör olarak düşünülür. m satırlı, n sütunlu bir matriste her eleman iki indis ile gösterilir. Örneğin a_{ij} elemanı, (i = 1, 2, ... , m; j = 1, 2, ... , n)i ninci satır, j ninci sütunda bulunmaktadır.

Bir matriste yer alan her bir elemanın yeri, katsayının ikili indisi ile belirlenmektedir. İlk indis elemanın bulunduğu satırı, ikincisi ise sütunu gösterir. Örneğin a_{ij} elemanı, i ninci satır ve j ninci sütunda bulunur.

DİKKAT

Tek bir satır veya sütundan oluşan matrislere de **vektör** denir. Eğer matris tekbir sütundan oluşuyorsa sütun vektör; buna karşılık tek bir satırdan oluşuyorsa satır vektör olarak adlandırılır. Örneğin, $m \times 1$ boyutundaki bir matris sütun vektör iken; $1 \times n$ boyutundaki bir matris satır vektördür.

Vektör: Tek bir satır veya sütundan oluşan matristir.

Vektörlerde sayılar ya satır ya da sütun olarak sıralanırlar. Örneğin, tablo 5.1'de yer alan GDP ve bileşenlerine ait 2010 yılı gözlemleri, bir satır vektör oluştururken; GDP'ye ait 2006-2010 yılı arası yıllık gözlemler bir sütun vektör oluşturur.

Tablo 5.1
Harcamalar Yöntemiyle Gayri Safi Yurtiçi Hasıla (1998 fiyatlarıyla), 1998-2010 (₺1000)

Yıllar	Gayri Safi Yurtiçi Hasıla	Tüketim Harcamaları	Kamu Harcamaları	Yatırımlar	Net İhracat
1998	70.203.147	46.668.561	7.197.730	16.046.649	14.167.223
1999	67.840.570	46.707.900	7.487.233	13.445.804	13.640.979
2000	72.436.399	49.444.450	7.910.764	15.794.125	16.607.950
2001	68.309.352	46.182.645	7.826.844	11.060.447	12.496.592
2002	72.519.831	48.372.691	8.283.079	12.684.573	15.104.296
2003	76.338.193	53.295.981	8.066.780	14.481.761	18.657.142
2004	83.485.591	59.143.619	8.553.886	18.589.131	22.545.355
2005	90.499.731	63.787.207	8.766.884	21.821.588	25.289.816
2006	96.738.320	66.749.821	9.506.407	24.714.467	27.031.712
2007	101.254.625	70.421.398	10.127.098	25.480.808	29.913.978
2008	101.921.730	70.198.486	10.304.175	23.912.294	28.678.672
2009	97.003.114	68.597.603	11.105.788	19.358.027	24.578.358
2010	105.738.813	73.199.512	11.327.507	25.154.548	29.657.682

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 96738320 \\ 101254625 \\ 101921730 \\ 97003114 \\ 105738813 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 105738813 & 73199512 & 11327507 & 25154548 & 29657682 \end{bmatrix}$$

Vektörler matrislerin özel durumlarıdır ve matris işlemlerini karekterize eden bütün kurallar vektörler için de geçerlidir. Her ne kadar matrisleri ifade etmek için büyük kalın harfler kullansak da vektörleri, **a**, **b** gibi küçük kalın harflerle göstereceğiz.

Eğer iki matrisin satır ve sütun sayıları birbirine eşitse, yani boyutları aynıysa, bu iki matrise çarpılır matrisler denir. Örneğin $\mathbf{A}_{mxn}$ ve $\mathbf{B}_{mxn}$ matrisleri çarpılır matrislerdir, çünkü satır ve sütun sayıları birbirine eşittir.

Kare matris: Satır ve sütun sayısı birbirine eşit olan matristir.

Satır ve sütun sayısı birbirine eşit olan matrise **kare matris** denir. Eğer m = n ise **A** matrisi bir kare matristir. A_{nxn} biçimindeki bir matris kare matristir, çünkü satır ve sütun sayısı aynıdır. Bu durumda **A** matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{A}_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Eğer bir matrisin tüm elemanları sıfırsa, o matrise sıfır matris denir. Aşağıda yer alan **A** matrisi bir sıfır kare matris örneğidir.

$$\mathbf{A}_{nxn} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Üçgensel matris: Köşegeninin alt veya üstündeki elemanları sıfırdan oluşan kare matristir.

İktisatta ve özellikle ekonometride sıkça kullanılan bazı kare matris tipleri vardır. Bunların başında üçgensel matris gelir. **Üçgensel matris**, köşegeninin alt veya üstündeki elemanları sıfırdan oluşan kare matristir. Eğer üçgensel matrisin köşegeninin üstündeki elemanlar sıfır ise o matrise **alt üçgensel matris**; köşegeninin altındaki elelmanlar sıfır ise o matrise **üst üçgensel matris** denir. Örneğin aşağıda yer alan **A** matrisi, bir üst üçgensel matris örneğidir.

$$\mathbf{A}_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

DİKKAT

Bir matrisin köşegen elemanları, satır ve sütun indisleri birbirine eşit olan elemanlardır. Örneğin, bir *A* matrisi için, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ gibi.

Simetrik matris: Tüm i ve j'ler için, $a_{ij} = a_{ji}$ koşulu gerçekleşen matristir.

Eğer bir matriste tüm i ve j'ler için, $a_{ij} = a_{ji}$ gerçekleşiyorsa, o matrise **simetrik matris** denir. Ayrıca daha sonra göreceğimiz gibi, simetrik matrisin evriği kendisine eşit olur. Aşağıda yer alan A matrisleri birer simetrik matristir.

$$\mathbf{A}_{2x2} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{A}_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Eğer bir kare matrisin sadece köşegen elemanları sıfırdan farklıysa o matrise **köşegen matris** denir. Aşağıdaki **A** matrisi, sıfırdan farklı elemanları sadece köşegen üzerinde yer aldığı için bir köşegen matristir.

Köşegen matris: Sadece köşegen elemanları sıfır olmayan matristir.

$$\mathbf{A}_{nxn} = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Eğer bir köşegen matrisin köşegen elemanları birbirine eşitse o matrise **skaler matris** denir. Örneğin aşağıda yer alan **A** matrisinin köşegen elemanları birbirine ve onlar da a'ya eşit olduğu için **A** matrisi skaler matristir.

$$\mathbf{A}_{nxn} = \begin{bmatrix} a & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

Köşegen elemanları bire eşit olan skaler matrise de **birim matris** denir. Birim matris her zaman **I** ile gösterilir. Birim matris yazılırken matrisin boyutunu ifade etmek için genellikle bir indis kullanılır. Örneğin aşağıda yer alan matris, nxn boyutlu bir birim matris örneğidir.

Birim matris: Köşegen elemanları bir olan skaler matristir.

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{nxn}$$

TEMEL MATRİS İŞLEMLERİ

Şimdiye kadarki açıklamalarımızda matrisin ne olduğunu, özellikle ekonometride yaygın olarak kullanılan matris türlerini tanıttık. Ancak matrislerle ilgili açıklamalarımız sadece bunlarla sınırlı değildir. Çünkü biz daha ileri gidip matrisleri, iktisatta sorunların çözümünde ve özellikle de denklem sistemlerinin çözümünde kullanacağız. Bunun için de, evriğin alınması, toplama ve çıkarma, matrislerin eşitliği, matrisin bir sayı ile çarpımı ve matrislerin çarpımı gibi birçok matematiksel işlemin; matrisler kullanılarak nasıl yapıldığını da göstereceğiz. Şimdi matrislerin eşitliğinden başlayarak bunları tek tek açıklamaya çalışalım.

Matrislerin Eşitliği

İki matris veya vektörün eşit olabilmesi için, her ikisinin hem aynı boyutta yani aynı satır ve sütun sayısına sahip olması ve her iki matrisin karşılık gelen satır ve sütun elemanlarının biribirine eşit olması gerekir. Örneğin, m satır ve n sütun sayısı-

na eşit olan, yani boyutu mxn olan **A** ve **B** gibi iki matrisin eşit olabilmesi için, tüm i ve j değerleri için,

$$a_{ij} = b_{ij}$$

olması gerekir.

DİKKAT

i = 1, ... , m ve j = 1, ..., n dir.

SIRA SİZDE 1

***A* ve *B* gibi eşit iki matris aşağıdaki gibi olsun. Buna göre x ve y değerlerini bulunuz.**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x-y & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrislerde Toplama ve Çıkarma

İki matrisin toplanıp çıkarılabilmesi için iki matrisin aynı boyutta, yani iki matrisin satır ve sütun sayılarının birbirine eşit olması gerekir. Toplama ve çıkarma işlemleri sonucu elde edilen yeni matrisin boyutu da toplanan ve çıkarılan matrisle aynı olur. m tane satırı ve n tane sütunu olan, yani mxn boyutunda, **A** ve **B** gibi iki matris olsun. **A** ve **B** matrisinin toplamı,

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

ve farkları ise

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

olur.

Örneğin, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ ise **A** ve **B** matrisleri toplamı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}_{2x3} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}_{2x3} = \begin{bmatrix} (3+4) & (-7+0) & (2+1) \\ (0+2) & (1+(-3)) & (8+0) \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -7 & 3 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}_{2x3}$$

SIRA SİZDE 2

Yukarıdaki örnekte verilen *A* ve *B* matrislerini kullarak *A-B*'yi bulunuz.

Matrisin İz Değeri

Hoy (2001) de tanımlandığı gibi, bir kare matrisin iz değeri (trace), matrisin köşegen elemanlarının toplanmasıyla bulunur ve Tr(**A**) veya trace(**A**) biçiminde gösterilir. Kare **A** matrisi nxn boyutunda ise A'nın izi,

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

biçiminde hesaplanır. Örneğin $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \\ 100 & 200 & 300 \end{bmatrix}$ biçiminde ise, iz değeri,

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 1 + 20 + 300 = 321$$

olur.

İz değeri işlemcisinin bazı özellikleri vardır. Bunlar,

- İki matrisin toplamının iz değeri, ayrı ayrı matrislerin iz değerleri toplamına eşittir. Yani, Tr(**A**+**B**) = Tr(**A**) + Tr(**B**)
- Tr(**AB**) = Tr(**BA**) dır.

Matrislerde Çarpma

Matrislerde çarpma işlemi iki şekilde gerçekleştirilir. Bunların ilkinde, belli bir değer, örneğin bir sayı ile matris çarpılır ve bu işleme skalerle çarpım denir. İkincisinde ise bir matris başka bir matris ile çarpılır. Şimdi bunları sırasıyla açıklayalım.

Matrisin Bir Sayı ile Çarpımı

Matrisler skaler adı da verilen reel sayılarla çarpılır. Herhangi bir sayının matris ile çarpımına skaler çarpan denir. Matrisin skalerle çarpımı, matrisin her elemanının belli bir sayıyla tek tek çarpılmasıyla gerçekleşir. Örneğin, k gibi bir sabitin nxn boyutunda **A** matrisinin çarpımı olan k**A** matrisi, A matrisinin tüm elemanlarının k ile çarpılmasıyla elde edilir.

$$k\mathbf{A} = \left[ka_{ij}\right] = k\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrislerin Çarpımı

Nasıl 5 ve 8 gibi iki sayıyı çarpıyorsak, matrisleri de çarpabiliriz. Ancak matrislerin çarpımı ile sayıların çarpımı arasında iki tane önemli fark vardır. Birincisi, her matris ikilisi çarpılamaz ve çarpılan matrislerin boyutu önemlidir. **A** ve **B** gibi iki matrisin çarpılabilmesi için, yani **AB**'nin elde edilebilmesi için ilk matrisin yani **A** matrisinin sütun sayısının, ikinci matrisin, yani **B** matrisinin, satır sayısına eşit olması gerekir. Örneğin, **A** matrisi mxn boyutunda ve **B** matrisi de nxp boyutunda ise ancak **AB** matrisi bulunur. **AB** çarpım matrisinin, örneğin **C** matrisinin, boyutu mxp olur. Yani birinci matrisin satır sayısıyla ikinci matrisin sütun sayısı çarpım matrisinin boyutunu oluşturur.

Çarpım matrisinin elemanları bulunurken, birinci matrisin satır elemanları ile ikinci matrisin sütun elemanlarının çarpımları toplamı alınır.

Eğer ise $\mathbf{A}_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$; $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{nxp}$; $i = 1...m; j = 1...p$ **A** ve **B** matrislerinin çarpım matrisi olan **C**, mxp boyutunda bir matris olacaktır. Yani, $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = [c_{ij}]_{(mxp)}$ dir. Burada, $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{ij}b_{jk} + ... + a_{in}b_{nk}$ olacaktır. Matrislerle gös

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{nxp} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}_{mxp}$$

Şimdi bir örnekle iki matrisin nasıl çarpıldığını gösterelim. Diyelim ki **A** matrisi 3×3 boyutunda,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

B matrisi de 3×2 boyutunda,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. **AB = C** matrisinin nasıl elde edildiğini şimdi ayrıntılı olarak gösterelim. Çarpıma geçmeden önce çarpım koşulunun sağlanıp sağlanmadığını kontrol ediyoruz. Görüldüğü gibi, **A** matrisinin sütun sayısı, **B** matrisinin satır sayısına eşit olduğu için, çarpım koşulunu sağlamaktadır. **C** çarpım matrisinin ilk satır ve sütununda yer alan c_{11} değerini hesaplamak için, **A** matrisinin birinci satırında yer alan elemanlar ile **B** matrisinin birinci sütununda yer alan elemanlar karşılıklı çarpılarak toplamı alınır. Yani c_{11} değerini bulmak için aşağıdaki işlemler yapılır:

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 2x5 + (-1x4) + 4x1 = 10 - 4 + 4 = 10$$

İlk iki satırda yer alan değerleri ise aşağıdaki gibi hesaplarız.

$$c_{12} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = 2x2 + (-1x-3) + 4x0 = 4 + 3 + 0 = 7$$

$$c_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 1x5 + (0x4) + 2x1 = 5 + 2 + 0 = 7$$

$$c_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = 1x2 + (0x-3) + 2x0 = 2 + 0 + 0 = 2$$

Dolayısıyla **AB = C** matrisi,

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \end{bmatrix}_{3x3} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3x2} = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 2 \\ 14 & -5 \end{bmatrix}_{3x2}$$

biçiminde bulunur.

C matrisinin boyutunun kural gereği 3×2 olduğunu yani A matrisinin satır sayısıyla B matrisinin sütun sayısına eşit olduğunu unutmayınız.

DİKKAT

Yukarıdaki örnekte çarpım matrisinin üçüncü satır elemanlarını bulunuz.

SIRA SİZDE 3

Matris İşlemlerinin Yasaları

Yukarıda açıklamaya çalıştığımız matris işlemlerinin aritmetik işlemlerle benzer özellik taşıdığını rahatlıkla anlamışsınızdır. Şimdi bu bazı aritmetik kuralları bir anımsayalım:

- a(b+c) = ab+ac (Çarpmanın, toplama üzerine soldan dağılma özelliği)
- (a+b)c = ac+bc (Çarpmanın, toplama üzerine sağdan dağılma özelliği)
- a(bc) = (ab)c (Çarpmanın birleşme özelliği)
- ab = ba (Çarpmanın değişme özelliği)

Bu kuralların matris cebirinde de, son kural hariç, hemen hemen birebir karşılığı vardır. Bu nedenle de matrisleri (Vinogradov, 1999) da belirtildiği gibi genelleştirilmiş sayılar olarak düşünebiliriz. Bu kuralları matrisler için aşağıdaki gibi yazabiliriz:

- (A+B)+C = A+(B+C) (Matris toplamının birleşme özelliği)
- (AB)C = A(BC) (Matris çarpımın birleşme özelliği)
- A+B = B+A (Matris toplamının değişme özelliği)
- A(B+C) = AB+AC (Matris çarpımın, toplama üzerine soldan dağılma özelliği)
- (A+B)C = AC+BC (Matris çarpımın, toplama üzerine sağdan dağılma özelliği)

Aritmetikte geçerli ancak matrislerde geçerli olmayan kural ise matris çarpımının değişme özelliğidir. Her ne kadar aritmetikte ab = ba olsa da matrislerde her iki çarpım matrisi var olsa bile **AB = BA** olmayabilir.

Matrisin Evriği

Matrisin evriği, matrisin satır ve sütunlarının yer değiştirilmesi işlemidir.

Matrislerle ilgili bu ünitede sıkça kullanacağımız çok yararlı bir diğer işlem de matrisin evriğinin alınmasıdır. Bir matrisin evriği, matrisin satırları sütunları ile değiştirilerek elde edilir. Bu durumda matrisin birinci satırı birinci sütun, ikinci satırı ikinci sütun ve sonuncu satır sonuncu sütun olur. Yani evriği alınan matrisin satır sayısı, evrik matrisinin sütun sayısına; sütun sayısı da satır sayısına eşit olur. Bunun sonucunda evriği alınan **A** matrisinin boyutu mxn ise evriği olan matris nxm boyutunda olur.

Örneğin,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ ve evriği } \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

olur.

Görüldüğü gibi **A** matrsinin evriğinin alınması sonucu **A** matrisinin birinci satırı, **A′** matrisinin birinci sütunu; ikinci satırı da ikinci sütunu oldu.

SIRA SİZDE 4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$ **matrisinin evriğini bulunuz.**

Evrik işleminin bazı özellikleri vardır. Bunlar;

- İki matrisin toplamının evriği, matrislerin evrikleri toplamına eşittir. Yani $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$ olur.
- İki matrisin farkının evriği, matrislerin evriklerinin farkına eşittir. Yani $(\mathbf{A} - \mathbf{B})' = \mathbf{A}' - \mathbf{B}'$ olur.
- Bir matrisin evriğinin evriği orijinal matrise yani kendisine eşittir. Yani $(\mathbf{A}')' = \mathrm{A}$ olur.
- Bir sayı ile matrisin çarpımının evriği o sayı ile matrisin evriğinin çarpımına eşittir. Yani $(\mathbf{kA})' = \mathbf{kA}'$ olur.
- **A** ve **B** gibi iki matrisin çarpımının evriği $\mathbf{B}'\mathbf{A}'$ olur. Yani $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$ olur. Bu kural **A**, **B** ve **C** gibi üç matris için, $(\mathbf{ABC})' = \mathbf{C}'\mathbf{B}'\mathbf{A}'$ şeklinde olur.
- Eğer **A** matrisi kare matrisse ve evriği kendisine eşitse, yani $\mathbf{A}' = \mathrm{A}$ oluyorsa **A** matrisi simetrik matristir.

TERS MATRİSİN BULUNMASI

Hess (2002) 'de vurgulandığı gibi matrisleri koşullar sağlandığı takdirde toplayabilir, çıkarabilir ve çarpabiliriz. Ancak iki matrisi birbirine bölemeyiz. Yani iki matrisin oranı diye bir şeyden söz edemeyiz. Bununla birlikte nasıl bir sayıyı sıfırdan farklı bir sayıya bölmek, o sayıyı böldüğümüz sayının tersiyle çarpmak anlamına geliyorsa, aynı mantığı matrislerin tersine de uygulayabiliriz.

Ünitenin ileriki kısımlarında açıklayacağımız gibi denklem sistemlerini çözerken kullanacağımız yöntemlerden biri ise ters matris yöntemidir ve burada da katsayılar matrisinin tersini almak zorundayız. Bir matrisin tersinden söz edebilmek için her şeyden önce o matrisin kare matris olması gerekir. Ancak bu her kare matrisin de tersi olacağı anlamına gelmez. Eğer **A** gibi bir kare matrisin $\mathbf{A}^{-1}$ biçiminde gösterilen ters matrisi varsa, **A** matrisiyle tersinin çarpımının birim matrise eşit olması gerekmektedir. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ olacak şekilde B matrisi varsa B'ye A'nın tersi denir.

Bir matrisin tersinin alınabilmesi için gerek koşul o matrisin kare matris olmasıdır. Ancak bu yeterli değildir, çünkü **A** gibi bir kare matrisin tersinin alınabilmesi için $|\mathbf{A}|$ biçiminde gösterilen **A** 'nın determinantının sıfırdan farklı olması gerekir. Eğer bir matrisin determinant değeri sıfırdan farklıysa o matrise tekil olmayan matris denir ve tekil olmayan matrisin tersi alınabilir. Determinantı sıfır olan matrise ise tekil matris denir.

Tekil olmayan matris: Tersi alınabilen matristir.

Bir matrisin tersi alınırken iki yöntem uygulanır. Bunlar ek matris yöntemi ile Gauss Eleme yöntemi ya da Pivot yöntemi denilen yöntemlerdir. Şimdi bunları sırasıyla açıklayalım.

Gauss Eleme Yöntemi veya Pivot Yöntemi

Bu yöntemde **A** gibi bir matrisin tersi bulunurken **A** matrisinin sağ tarafına bir birim matris yazılır. Daha sonra her iki matrise aynı satır işlemleri uygulanır. Bu işlemler **A** matrisi bir birim matrise dönüşünceye kadar sürdürülür. Bu satır işlemleri sonucunda birim matrise dönüşen matris, **A** matrisinin ters matrisi olacaktır. Şim-

di bu söylediklerimizi bir örnekle gösterelim. Diyelim ki **A** matrisi 2×2 boyutunda ve aşağıdaki gibi olsun.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

A matrisinin tersini alabilmek için önce **A** matrsinin sağına 2×2 boyutunda birim matris yazalım ve sonrasında da aşağıdaki işlemleri sırasıyla yapalım.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Birinci satırı ikiye böl.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Birinci satırı ikinciden çıkar.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

3. İkinci satırı -2/7 ile çarp.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

4. İkinci sütunu 1/2 ile çarp ve birinci satırdan çıkar.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

A matrisi birim matrise dönüştüğü için yanındaki matris olan matris **A** matrisinin tersi olacaktır. Yani,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

olacaktır.

SIRA SİZDE 5

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$ **matrisinin tersini Gauss Eleme yöntemi ile bulunuz.**

Ek Matris Yöntemi

Bu yöntem ile ters matrisin bulunabilmesi için aşağıdaki aşamaların izlenmesi gerekir:

- Matrisin determinantının bulunması,
- Matrisin kofaktör matrisinin oluşturulması,
- Kofaktör matrisinin evriğinin alınarak ek matrisin bulunması,
- Ek matrisin her bir elemanının determinant değerine bölünmesi.

Şimdi bu aşamaların nasıl yapıldığını gösterelim. İşlemlere determinantın bulunması ile başlayalım.

Daha önce değindiğimiz gibi determinant bir doğrusal denklem sisteminin çözümünün bulunmasında kullanılır. 2×2 boyutundaki bir kare matris için determinant değeri, matrisin köşegen elemanları çarpımından köşegen dışı elemanları çarpımının çıkarılmasıyla bulunur.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

biçimindeki bir A matrisinin determimantı, $|\mathbf{A}|$

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

olur. Örneğin, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ biçimindeki bir **A** matrisinin determinantı

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2x5 - 3x(-1) = 10 + 3 = 13 \quad \text{olur.}$$

Her ne kadar 2×2 boyutundaki bir kare matris için determinant hesaplanması kolay olsa da matrislerin boyutu arttıkça bu hesaplama biraz karışık hâle gelecektir. İkiden daha yüksek boyutlu matrisler için determinant hesaplayabilmek için matrislerin minör ve kofaktör değerlerinin kullanılması gerekir. Çünkü bu boyuttaki bir matrisin determinantı, matrisin herhangi bir satır veya sütunundaki elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpımları toplamıdır.

Determinant: Bir matrisin determinantı o matrisin, herhangi bir satır veya sütunundaki elemanlarının kendi kofaktör değerleriyle çarpımları toplamıdır.

$n \times n$ boyutunda olup da, $n \geq 2$ olan matrislerin i ninci satır j ninci sütunundaki elemanın minörü, $|\mathbf{M}_{ij}|$, **A** matrisinin i ninci satırı ile j ninci sütununun silinmesiyle oluşturulan $(n\text{-}1) \times (n\text{-}1)$ boyutundaki yeni matrisin determinant değeridir. Örneğin,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

biçimindeki bir matrisin birinci satırında yer alan elemanlarının minör değeri sırasıyla şunlardan oluşur:

$$|\mathbf{M}_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

$$|\mathbf{M}_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$$

$$|\mathbf{M}_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

Yine $n \times n$ boyutundaki ve $n \geq 2$ olan matrislerin i ninci satır j ninci sütunundaki elemanın kofaktörü, $|\mathbf{C}_{ij}|$, minör değerine bir işaret verilerek

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

formülüyle bulunur. Minörlerin işareti eğer i+j toplamı çift sayı ise değişmezken tek sayı ise değişir. Örneğin, $|\mathbf{M}_{11}|, |\mathbf{M}_{22}|$ ve $|\mathbf{M}_{33}|$ minör değerleri ile kofaktör değerlerinin işareti aynı olacaktır. Yani, $|\mathbf{M}_{11}| = |\mathbf{C}_{11}|, |\mathbf{M}_{22}| = |\mathbf{C}_{22}|$ ve $|\mathbf{M}_{33}| = |\mathbf{C}_{33}|$ olacaktır. Buna karşılık $|\mathbf{M}_{21}|, |\mathbf{M}_{23}|$ için sırasıyla kofaktör değerleri $|\mathbf{C}_{21}| = -|\mathbf{M}_{21}|$ ve $|\mathbf{C}_{23}| = -|\mathbf{M}_{23}|$ olacaktır. 3×3 boyutundaki bir matrisin minör değerlierini kofaktöre çevirirken aşağıdaki işaret matrisi kullanılır.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Matrisin herhangi bir satır veya sütunundaki elemanlarının kofaktör değerleri bulunduktan sonra sıra matrisin determinantının bulunmasına gelir. Bunun için matrisin herhangi bir satır veya sütunundaki elemanları kendi kofaktörleriyle çarpılır. Örneğin, **A** matrisinin determinant değerini bulmak için **A** matrisinin birinci satırında yer alan elemanlarını kendi kofaktörleriyle çarpalım.

$$|\mathbf{A}| = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$$

Minör değerlerini de kullanırsak determinant değeri,

$$|\mathbf{A}| = a_{11}|\mathbf{M}_{11}| + a_{12}|\mathbf{M}_{12}| + a_{13}|\mathbf{M}_{13}|$$

veya,

$$|\mathbf{A}| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

olur.

Şimdi bir örnek yardımıyla konuyu iyice anlamaya çalışalım.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 9 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

A matrisinin determinantı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$|\mathbf{A}| = -2\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= -2(6x4 - 0x1) + 5(4x4 - 9x1) - 2(4x0 - 9x6) \\ &= -2x24 + 5x7 - 2(-54) \\ &= -48 + 35 + 108 \\ &= 95 \end{aligned}$$

SIRA SİZDE 6

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$ **matrisinin birinci satrını kullanarak determinant değerini bulunuz.**

Bu şekilde açıklamaya çalıştığımız detrminantın bazı faydalı özellikleri vardır. Bunlar:

1. Bir matrisin satır veya sütunundaki elemanları herhangi bir sabitle çarpıldığında detrminant değeri de o sabit kadar artar. Yani örneğin

$$k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}ka_{11} & ka_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}ka_{11} & a_{12}\\ ka_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

$$ka_{11}a_{22}-ka_{21}a_{12}=k(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})=k|\mathbf{A}|$$

2. Bir matrisin iki satır veya sütununun karşılıklı değişimi determinantın mutlak değerini değil ama işaretini değiştirir.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{11} & a_{12}\end{vmatrix}=-a_{21}a_{12}-(-a_{11}a_{22})=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

3. Bir matrisin evriğinin determinantı da matrisin determinantıyla aynıdır. Yani, $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}'|$ dir.
4. Bir matrisin herhangi bir satır veya sütununu k gibi bir sabitle çarpıp sonuçta bir başka satır veya sütuna eklendiğinde determinant değeri değişmez.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}+ka_{11}a_{12}-a_{12}a_{21}-ka_{11}a_{12}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

Determinant değeri bulunduktan sonra tersi alınacak matrisin önce kofaktör matrisi, daha sonra da kofaktörler matrisinin evriği olan ek matris bulunur. Bir matrisin kofaktör matrisi (**C** ile gösterilir) oluşturulurken matrisin her elemanının yerine kendi kofaktör değeri yazılır. Örneğin,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

gibi bir matrisin, kofaktör matrisi,

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}|c_{11}| & \cdots & |c_{1n}|\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ |c_{n1}| & \cdots & |c_{nn}|\end{pmatrix}$$

ve kofaktörler matrisinin evriği olan ve Ek(A) şeklinde gösterilen ek matrisi de

$$ek(\mathbf{A})=\mathbf{C}'=\begin{pmatrix}|c_{11}| & \cdots & |c_{n1}|\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ |c_{1n}| & \cdots & |c_{nn}|\end{pmatrix}$$

A matrisinin tersi, $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\text{ek}(\mathbf{A})$ biçiminde yazılır. Şimdi $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ biçimindeki A matrisinin tersini bulalım. Bunun için öncelikle matrisin determinant değeri ile ek matrisi bulmamız gerekmektedir. Bunlar içinse önce matrisin kofaktörler matrisini ve kofaktörler matrisi için de her bir elemanın minör değerini bulmamız gerekir. A matrisinin elemanlarının minör değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$|\mathbf{M}_{11}| = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5x5 - 2x0 = 25 - 0 = 25$$

$$|\mathbf{M}_{12}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3x5 - 4x0 = 15 - 0 = 15$$

$$|\mathbf{M}_{13}| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3x2 - 4x5 = 6 - 20 = -14$$

$$|\mathbf{M}_{21}| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4x5 - 2x3 = 20 - 6 = 14$$

$$|\mathbf{M}_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2x5 - 4x3 = 10 - 12 = -2$$

$$|\mathbf{M}_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2x2 - 4x4 = 4 - 16 = -12$$

$$|\mathbf{M}_{31}| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 4x0 - 5x3 = 0 - 15 = -15$$

$$|\mathbf{M}_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2x0 - 3x3 = 0 - 9 = -9$$

$$|\mathbf{M}_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2x5 - 3x4 = 10 - 12 = -2$$

Kofaktörleri,

$$\mathbf{C}_{11} = (-1)^{1+1}|\mathbf{M}_{11}| = (-1)^2 x25 = 25$$
$$\mathbf{C}_{12} = (-1)^{1+2}|\mathbf{M}_{12}| = (-1)^3 x15 = -15$$
$$\mathbf{C}_{13} = (-1)^{1+3}|\mathbf{M}_{13}| = (-1)^4 x(-14) = -14$$
$$\mathbf{C}_{21} = (-1)^{2+1}|\mathbf{M}_{21}| = (-1)^3 x14 = -14$$
$$\mathbf{C}_{22} = (-1)^{2+2}|\mathbf{M}_{22}| = (-1)^4 x(-2) = -2$$
$$\mathbf{C}_{23} = (-1)^{2+3}|\mathbf{M}_{23}| = (-1)^5 x(-12) = 12$$
$$\mathbf{C}_{31} = (-1)^{3+1}|\mathbf{M}_{31}| = (-1)^4 x(-15) = -15$$
$$\mathbf{C}_{32} = (-1)^{3+2}|\mathbf{M}_{32}| = (-1)^5 x(-9) = 9$$
$$\mathbf{C}_{33} = (-1)^{3+3}|\mathbf{M}_{33}| = (-1)^6 x(-2) = -2$$

ve kofaktörler matrisi

Ek matris: Bir matrisin kofaktör matrisinin evriğidir.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 25 & -15 & -14 \\ -14 & -2 & 12 \\ -15 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Ek matris,

$$\mathbf{ek(A)} = \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 25 & -14 & -15 \\ -15 & -2 & 9 \\ -14 & 12 & -2 \end{bmatrix}$$

Matrisin determinantı ise

$$|\mathbf{A}| = 2(25) + 4(-15) + 3(-14) = 50 - 60 - 42 = -52 \quad \text{dir.}$$

A matrisinin ters matrisi ise

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{ek(A)} = \frac{1}{-52}\begin{bmatrix} 25 & -14 & -15 \\ -15 & -2 & 9 \\ -14 & 12 & -2 \end{bmatrix}$$

olacaktır.

Ters matrisin bazı özellikleri vardır (Hess, 2002). Bunlar:

1. Bir matrisin tersi ile çarpımı birim matrise eşittir. Yani, $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ dir.
2. Bir matrisin tersinin tersi kendisine eşittir. Yani, $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ 'dır.
3. İki matrisin çarpımının tersi matrislerin terslerinin tersten çarpımına eşittir. Yani, $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ dir.
4. Bir matrisin evriğinin tersi matrisin tersinin evriğidir. Yani, $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$ dir.

SIRA SİZDE 7

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ **matrisinin tersini bulunuz.**

DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Matris cebiri sayesinde doğrusal denklem sistemini çok kompakt bir biçimde yazabilir, sistemin bir çözümü olup olmadığını belirleyebilir, eğer varsa sistemin çözümünü yapabiliriz. İktisadi modellerde eşitlik sisteminde yer alan eşitlik sayısıyla bilinmeyen sayısı genellikle eşit olduğu için kullandığımız birçok matris kare ve tersi alınabilen matristir.

Doğrusal denklem sistemleri ters matris yöntemi, Gauss yöntemi ve Cramer kuralı ile çözülebilir. Şimdi bunları sırasıyla açıklayalım.

Ters Matris Yöntemi

N tane doğrusal eşitlik ve n tane bilinmeyenden oluşan bir denklem sistemi düşünelim. Böyle bir denklem sistemi daha önce de değindiğimiz gibi matris ve vektörler kullanarak

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

biçiminde ifade edilir. Burada **A** katsayılar matrisini **x** çözüm vektörünü ve **b** de sabitler vektörünü verir. Eğer **A** matrisin tersi alınabilirse x in çözümü,

$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$

şeklinde bulunabilir.

Ters matris yöntemini kullanarak denklem sistemini nasıl çözebileceğimizi (Roy, 2001, s.366) verilen örneği kullanarak gösterebiliriz. Kapalı bir ekonomiyi mal ve hizmet piyasa dengelerini gösteren IS-LM fonksiyonları ile tanımlamaya çalışalım. IS eşitlikleri aşağıda yer almaktadır.

C = 15 + 0.8 (Y - T)
T = -25 + 0.25Y
I = 65 - R
G = 94

Bu eşitliklerde C, tüketim harcamalarını; T, vergileri; Y, toplam geliri; I, yatırım harcamalarını; R, faiz oranını ve G, kamu harcamalarını göstermektedir.

Para piyasası dengesini veren LM eşitlikleri ise

L = 5Y - 50R
M = 1500

şeklindedir. Burada L para talebini ve M de para arzını verir. Şimdi bu verilenleri kullanarak ekonominin genel dengesini sağlayan gelir ve faiz iklisini ters matris yöntemiyle bulalım.

Bunun için önce sistemi **Ax = b** biçiminde ifade edelim. Bunun için de öncelikle verilen eşitlikleri kullanarak IS ve LM fonksiyonlarını elde etmemiz gerekir. Bilindiği gibi IS fonnsiyonu mal piyasası dengesini gösterir ve Y = C + I + G eşitliğinden elde edilir. Buna göre, IS fonksiyonu

$$\begin{aligned}
&Y = 15 + 0.8(Y - 25 + 0.25Y) + 65 - R + 94\\
&\quad = 15 + 0.8Y - 0.8(-25 + 0.25Y) + 65 - R + 94\\
&Y - 0.8Y + 0.2Y = 15 + 20 + 65 + 94 - R\\
&Y(1 - 0.8 + 0.2) = 15 + 20 + 65 + 94 - R\\
&Y = \frac{194}{0.4} - \frac{R}{0.4} = 485 - 2.5R
\end{aligned}$$

Para piyasası dengesini veren LM fonksiyonu ise para talebini para arzına eşitleyerek elde edilir. Buna göre LM fonksiyonu ise

1500 = 5 Y - 50R ⇒ Y = 300 + 10R L = M

IS ve LM fonksiyonlarını elde ettikten sonra bu fonksiyonları kullanarak aşağıdaki denklem sistemini

Y + 2.5R = 485
Y - 10R = 300

ve matris biçiminde de bu denklem sistemini

$$\begin{bmatrix} 1 & 2.5 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 485 \\ 300 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazabiliriz. Modeli gelir ve faiz oranı için çözdüğümüzde ise

$$\begin{bmatrix} Y \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2.5 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 485 \\ 300 \end{bmatrix}$$

olur. Y ve R nin çözüm değerlerini bulmak için **A** matrisinin tersini bulmamız gerekir. Bunun için de öncelikle **A** matrisinin kofaktör matrisini ve ek matrisini bulursak; bunlar

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -10 & -1 \\ -2.5 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{ek}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} -10 & -2.5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. **A** matrisinin determinantı |**A**| = 1(-10) - (-2.5) (-1) = -10 -2.5 = -12.5 'dir. Dolayısıyla **A** matrisinin tersi,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-12.5} \begin{bmatrix} -10 & -2.5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.2 \\ 0.08 & -0.08 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan da Y ve R değerleri

$$\begin{bmatrix} Y \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.08 & -0.08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 485 \\ 300 \end{bmatrix}$$

$$Y = 0.8(485) + 0.2(300) = 388 + 60 = 448$$

$$R = 0.08(485) + (-0.08)(300) = 38.8 + (-24) = 14.8$$

biçiminde bulunur. Bu sonuçlara göre bu kapalı ekonomide denge çıktı düzeyi 448 ve faiz oranı da 14.8% 'dir. Denge gelir düzeyinde vergi gelirleri, T = -25 + 0.25 (448) = 87 ve kamu harcamaları da 94 birim olduğu için ilgili ekonomide bir bütçe açığından söz edilebilir.

SIRA SİZDE 8

İki mal için denge koşulu aşağıdaki eşitliklerde verilsin:

$-4P_1 + P_2 = -13$

$2P_1 - 5P_2 = -7$

Ters matris yöntemiyle P_1 ve P_2 fiyatlarını bulunuz.

Gauss Eleme Yöntemi

Bu yöntemle denklem sistemleri çözülürken **A** matrisi ile **b** vektörü üzerine basit satır işlemleri uygulanarak **A** matrisinin birim matrise dönüşümü sağlanır. Bu süreç sonucunda elde edilen **b** vektörü de çözüm vektörü olur.

Şimdi bu yöntemle denklem sisteminin nasıl çözüldüğünü (Dadkhah, 2007, s.144) yer alan örneği kullanarak gösterelim.

Örnekte kullandığımız denklem sistemi iki doğrusal eşitlikten oluşmakta ve

$$2x_1 + x_2 = 5$$
$$x_1 - 3x_2 = -8$$

biçimindedir. Sistemi **Ax = b** biçiminde yazabiliriz. Bu durumda

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix};\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

olur.

Gauss eleme yöntemi ile x_1 ve x_2 değerlerini bulmak için sistemi önce

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazıp; daha sonra şu aşamaları izlememiz gerekir:

1. **A** matrisi ve birim matrisinin birinci satırını 2 ile böleriz.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{0}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

2. Birinci satırı ikinci satırdan çıkartırız.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

3. İkinci satırı -2/7 ile çarparız.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

4. İkinci satırın 1/2sini birinci satırdan çıkartırız.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Bu işlem sonucunda **A** matrisinin tersini $\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$ şeklinde elde ederiz. Bunu **b** vektörüyle çarparsak x_1 ve x_2 değerlerini elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{3}{7}(5) + \frac{1}{7}(-8) = \frac{15}{7} - \frac{8}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{7}(5) + (-\frac{2}{7})(-8) = \frac{5}{7} + \frac{16}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

Cramer Kuralı

Doğrusal eşanlı denklem sistemini çözümünde kullanılan bir diğer yöntem de Cramer Kuralı'dır. Bu kural özellikle denklem sisteminde yer alan tüm bilinmeyen değişkenlerin değeri değil de bunlardan bazıları ve hatta bir tanesinin değeri bulanmak istendiğinde kullanılabilecek oldukça yararlı bir yöntemdir. Bu nedenle bu yöntem şimdiye kadar açıklamaya çalıştığımız diğer iki yöntemle karşılaştırıldığında hem daha çabuk hem daha kolaylıkla uygulanabilecek bir yöntemdir. Bu yöntemde sistemin çözümü için determinantlar kullanılır. Yöntemin nasıl uygulandığını gösterebilmek için denklem sisteminin matris gösterimini tekrar anımsayalım.

Ax = b

Bu gösterimde yer alan **A** matrisi nxn boyutunda parametre matrisi x vektörü nx1 boyutunda bilinmeyen değişkenler vektörü ya da çözüm vektörü; **b** yine nx1 boyutunda sabit değerler vektörüdür.

Cramer Kuralı'na göre denklem sisteminde yer alan ve değeri bilinmeyen değişkenlerden herhangi birinin örneğin x_i nin değeri, **A** matrisinde i ninci sütununa denk gelen elemanların (değerlerin), **b** vektöründeki sabitlerle değiştirilmesiyle elde edilen yeni matrisin determinantını, **A** matrisinin determinantına oranlanmasıyla bulunur.

Cramer Kuralı: Ax = b biçimindeki denklem sistemini determinantlar kullanarak çözme yöntemidir. Sistemde yer alan x_i değişkeninin değerini bulmak için $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ formülü kullanılır.

Eğer **A** matrisinin i ninci sütununun b vektöründeki sabitlerle değiştirilmesiyle elde edilen yeni matrise $\mathbf{A}_i$ matrisi dersek Cramer Kuralı'na göre x_i değerini $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ formülünü kullanarak bulabiliriz. Cramer Kuralı'nı kullanarak denklem sistemini çözmek için aşağıdaki adımları izlemek yararlıdır:

1. Sistemi matris formunda ifade et yani **Ax = b** biçiminde yeniden yaz
2. **A** matrisinin determinatını bul. Yani $|\mathbf{A}|$ 'yı bul.
3. Hangi x değişkeninin değerini bulacaksınız **A** matrisinde o değişken katsayılarının yerine b vektöründeki sabit değerleri koyarak $\mathbf{A_i}$ matrisini oluştur ve A_i matrisinin determinantını bul, yani $|\mathbf{A}_i|$ 'yı bul.
4. $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ formülünü kullanarak xi değerini bul.

Şimdi bu aşamaları izleyerek ve (Dowling, 1980, s.231)de aldığımız örneği kullanarak denklem sisteminin nasıl çözüldüğünü gösterelim.

2 eşitlik ve 2 bilinmeyenden oluşan denklem sistemimiz aşağıdaki gibidir:

$7P_1 + 2P_2 = 60$
$P_1 + 8P_2 = 78$

Şimdi Cramer Kuralı ile P_1 ve P_2 fiyatlarını bulalım. Yukarıda önerdiğimiz aşamaları izlersek;

1. Önce sistemi matrislerle **Ax = b** biçiminde yazalım.

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 78 \end{bmatrix}$$

2. Şimdi **A** matrisinin determinantını bulalım. |**A**| = 7(8) - 2(1) = 54
3. $\mathbf{A_1}$ ve $\mathbf{A_2}$ matrislerini oluşturalım. $\mathbf{A_1}$ matrisini oluştururken **A** matrisinin birinci sütunundaki elemanları **b** vektöründeki sabit değerlerle ve $\mathbf{A_2}$ matrisini oluşturuken de **A** matrisinin ikinci sütunundaki elemanları **b** vektöründeki sabit değerlerle değştirelim. Bu durumda $\mathbf{A_1}$ ve $\mathbf{A_2}$ matrisleri aşağıdaki gibi olur.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 60 & 2 \\ 78 & 8 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 60 \\ 1 & 78 \end{bmatrix}$$

4. $\mathbf{A_1}$ ve $\mathbf{A_2}$ matrislerinin determinantlarını bulalım.
   $|\mathbf{A}_1|$ = 60(8) - 2(78) = 324
   $|\mathbf{A}_2|$ = 7(78) - 1(60) = 486

5. Cramer Kuralı'nı uygulayarak P_1 ve P_2 fiyatlarını aşağıdaki gibi elde edelim.

$$P_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{324}{54} = 6$$

$$P_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{486}{54} = 9$$

SIRA SİZDE 9

6x + 7y = 10
4x + 5y = 8 **biçimindeki denklem sisteminde x ve y değerlerini Camer Kuralı'nı kullanarak hesaplayınız.**

Özet

AMAÇ 1

Matris cebiri terminolojisi ile kullanılan notasyonları tanımak

Matris, bir köşeli büyük parantez içinde satır ve sütunlara yazılı sayı, değişken veya fonksiyonları temsil eden elemanlardan oluşan dikdörtgen biçiminde bir tablodur. Bir matris, bir veri setinin doğal yorumu olan, sütunlar seti ya da satırlar seti olarak da düşünülebilir. Matris, ya **A** = $[a_{ij}]$ ya da $[\mathbf{A}]_{ij}$ biçiminde gösterilir. a_{ij} (i = 1, 2, ... , m; j = 1,2, ... , n) sayıları, **A** matrisinin girdileridir. Satır ve sütun sayıları matrisin boyutu olarak adlandırılır. **A** matrisinin boyutu mxn'dir. 1×1 boyutundaki bir matris 5, 10 gibi bir sayı iken, m×1 boyutundaki matris bir sütun vektörü; 1×n boyutundaki matris ise bir satır vektörü olarak adlandırılır. Matrisler oluşturulurken ya büyük köşeli parantez ya da sadece parantez kullanılır. Ayrıca matrisleri ifade ederken büyük kalın harfler kullanılır, örneğin **A** gibi. Matrisin boyutu yazılırken önce satır sayısı sonra sütun sayısı yazılır. Bir matriste yer alan her bir elemanın yeri, katsayının ikili indisi ile belirlenmektedir. İlk indis elemanın bulunduğu satırı, ikincisi ise sütunu gösterir. Tek bir satır veya sütundan oluşan matrislere de vektör denir. Eğer matris tek bir sütundan oluşuyorsa, sütun vektör; buna karşılık tek bir satırdan oluşuyorsa satır vektör olarak adlandırılır. Satır ve sütun sayısı birbirine eşit olan matrise kare matris denir. Üçgensel matris, köşegeninin alt veya üstündeki elemanları sıfırdan oluşan kare matristir. Eğer bir matriste tüm i ve j'ler için, $a_{ij} = a_{ji}$ gerçekleşiyorsa, o matrise simetrik matris denir. Köşegen elemanları bire eşit olan skaler matrise de birim matris denir.

AMAÇ 2

Matrisleri toplayıp çıkarmak

İki matrisin toplanıp çıkarılabilmesi için iki matrisin aynı boyutta, yani iki matrisin satır ve sütun sayılarının birbirine eşit olması gerekir. Toplama ve çıkarma işlemleri sonucu elde edilen yeni matrisin boyutu da toplanan ve çıkarılan matrisle aynı olur. m tane satırı ve n tane sütunu olan, yani m×n boyutunda, **A** ve **B** gibi iki matris olsun. **A** ve **B** matrislerinin toplamı ve farkları da gene mxn boyutunda olur.

AMAÇ 3

Matrisleri bir sayı ve başka bir matris ile çarpmak

Matrislerde çarpma işlemi iki şekilde gerçekleştirilir. Bunların ilkinde, belli bir değer, örneğin bir sayı ile matris çarpılır ve bu işleme skalerle çarpım denir. İkincisinde ise bir matris başka bir matris ile çarpılır. Matrisler skaler adı da verilen reel sayılarla çarpılır. Herhangi bir sayının matris ile çarpımına skaler çarpan denir. Matrisin skalerle çarpımı, matrisin her elemanının belli bir sayıyla tek tek çarpılmasıyla gerçekleşir. Örneğin, k gibi bir sabitin n×n boyutunda **A** matrisinin çarpımı olan k**A** matrisi, A matrisinin tüm elemanlarının k ile çarpılmasıyla elde edilir. Her matris ikilisi çarpılamaz ve çarpılan matrislerin boyutu önemlidir. **A** ve **B** gibi iki matrisin çarpılabilmesi için, yani **AB**'nin elde edilebilmesi için ilk matrisin yani **A** matrisinin sütun sayısının, ikinci matrisin yani **B** matrisinin satır sayısına eşit olması gerekir. Örneğin, **A** matrisi m×n boyutunda ve **B** matrisi de n×p boyutunda ise ancak **AB** matrisi bulunur. **AB** çarpım matrisinin, örneğin **C** matrisinin, boyutu m×p olur. Yani birinci matrisin satır sayısıyla ikinci matrisin sütun sayısı çarpım matrisinin boyutunu oluşturur. Çarpım matrisinin elemanları bulunurken, birinci matrisin satır elemanları ile ikinci matrisin sütun elemanlarının çarpımları toplamı alınır.

AMAÇ 4

Bir matrisin determinantını ve tersini hesaplamak

Bir matrisin tersinin alınabilmesi için gerek koşul o matrisin kare matris olmasıdır. Ancak bu yeterli değildir çünkü **A** gibi bir kare matrisin tersinin alınabilmesi için |**A**| biçiminde gösterilen A'nın determinantının sıfırdan farklı olması gerekir. Bir matrisin tersi alınırken iki yöntem uygulanır. Bunlar ek matris yöntemi ile Gauss Eleme yöntemi ya da Pivot yöntemi denilen yöntemlerdir. Gauss Eleme yönteminde **A** gibi bir matrisin tersi bulunurken A matrisinin sağ tarafına bir birim matris yazılır. Daha sonra her iki matrise aynı satır işlemleri uygulanır. Bu işlemler **A** matrisi bir birim matrise dönüşünceye kadar sürdürülür. Bu satır işlemleri sonucunda birim matrise dönüşen matris **A** matrisinin ters matrisi olacaktır. Ek matris yöntemi ile ters matrisin bulunabilmesi için önce matrisin determinantının bulunması

gerekir. Sonra matrisin kofaktör matrisi oluşturulur. Daha sonra kofaktör matrisinin evriği alınarak ek matris elde edilir. Son olarak ek matrisin her bir elemanı determinant değerine bölünür. Bir matrisin determinantı o matrisin, herhangi bir satır veya sütunundaki elemanlarının kendi kofaktör değerleriyle çarpımları toplamıdır. 2×2 boyutundaki bir kare matris için determinant değeri, matrisin köşegen elemanları çarpımından köşegen dışı elemanları çarpımının çıkarılmasıyla bulunur. İkiden daha yüksek boyutlu matrisler için determinant hesaplayabilmek için matrislerin minör ve kofaktör değerlerinin kullanılması gerekir. Çünkü bu boyuttaki bir matrisin determinantı, matrisin herhangi bir satır veya sütunundaki elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpımları toplamıdır.

AMAÇ 5

Ters matris, Gauss Yöntemi ve Cramer kuralı ile denklem sistemlerini çözmek

Doğrusal denklem sistemleri ters matris yöntemi, Gauss yöntemi ve Cramer kuralı ile çözülebilir. Ters matris yönteminde N tane doğrusal eşitlik ve n tane bilinmeyenden oluşan bir denklem sistemi ele alınır. Böyle bir denklem sistemi matris ve vektörler kullanarak **Ax = b** biçiminde ifade edilir. Burada **A** katsayılar matrisini **x** çözüm vektörünü ve **b** de sabitler vektörünü verir. Eğer **A** matrisin tersi alınabilirse **x** in çözümü, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$ şeklinde bulunabilir. Gauss eleme yöntemiyle denklem sistemleri çözülürken **A** matrisi ile **b** vektörü üzerine basit satır işlemleri uygulanarak **A** matrisinin birim matrise dönüşümü sağlanır. Bu süreç sonucunda elde edilen **b** vektörü de çözüm vektörü olur. Doğrusal eşanlı denklem sistemini çözümünde kullanılan bir diğer yöntem de Cramer Kuralı'dır. Bu kural özellikle denklem sisteminde yer alan tüm bilinmeyen değişkenlerin değeri değil de bunlardan bazıları ve hatta bir tanesinin değeri bulunmak istendiğinde kullanılabilecek oldukça yararlı bir yöntemdir. **Ax = b** biçimindeki denklem sistemini determinantlar kullanarak çözme yöntemidir. Sistemde yer alan x_i değişkeninin değerini bulmak için $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$ formülü kullanılır.

MATEMATİKSEL İKTİSAT

6

Amaçlarımız

Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- Çok değişkenli fonksiyon kavramını tanımlayıp iki ve daha fazla değişkenli fonksiyonları açıklayabilecek,
- Birinci ve ikinci dereceden kısmi türevlerin nasıl alındığını açıklayabilecek,
- Çok değişkenli fonksiyonları ve kısmi türevi iktisadi konularda kullanabilecek, bilgi ve becerilere sahip olacaksınız.

Anahtar Kavramlar

- İki değişkenli fonksiyon
- Çok değişkenli fonksiyon
- Fonksiyonun tanım kümesi
- Kısmi türev
- İkinci dereceden kısmi türev
- Esneklikler
- Üretim fonksiyonu
- Fayda fonksiyonu
- Kâr fonksiyonu
- Homojen fonksiyon
- Ölçeğe göre getiri

İçindekiler

Matematiksel İktisat → Çok Değişkenli Fonksiyonlar →

- ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYON KAVRAMI
- KISMİ TÜREV
- ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN İKTİSADİ UYGULAMALARI

Çok Değişkenli Fonksiyonlar

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYON KAVRAMI

Daha önce tek değişkenli fonksiyonları ve bu fonksiyonların temel özelliklerini inceledik. Bu ünitede de çok değişkenli fonksiyonların temel özelliklerini gözden geçirip bu tür fonksiyonların iktisatta kullanımı ile ilgili örnekler vereceğiz. Çok değişkenli fonksiyonların en basit biçimi iki değişkenli fonksiyonlardır. Konuyu daha iyi anlayabilmek için öncelikle iki değişkenli fonksiyonları inceleyip daha sonra değişken sayılarını arttırarak n değişkenli fonksiyon kavramını açıklayacağız. Çünkü iktisattaki çoğu ilişki ikiden fazla değişken içerir. Örneğin bir malın talebi sadece malın fiyatına değil, aynı zamanda tüketicinin geliri, ikame ve tamamlayıcı malların fiyatları, tüketicinin zevk ve tercihleri gibi birçok faktöre bağlıdır. Benzer şekilde, bir üretim sürecinde çıktı miktarı toprak, sermaye, emek gibi birçok girdinin kullanımına bağlı olarak değişir. Kısaca ekonomik davranışları analiz etmek amacıyla daha önce gördüğümüz tek değişkenli fonksiyon kavramını biraz daha genişletip daha fazla değişkenin kullanımına imkân tanımamız gerekir.

İki Değişkenli Fonksiyonlar

Boş küme olmayan herhangi A, B ve C kümeleri verilsin.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

Eğer A×B kümesinden alınmış her (x, y) çiftini C kümesinden tek bir z elemanı ile eşleyen bir f kuralı verilmişse bu f kuralına A×B kümesinden C kümesine iki değişkenli fonksiyon denir ve

$f : A \times B \rightarrow C,\ z = f(x, y)$ veya $f = f(x, y)$ şeklinde gösterilir.

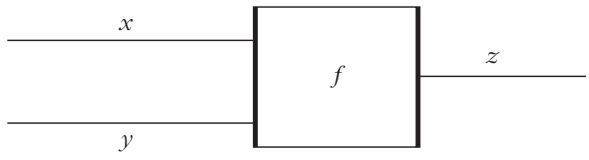
A×B'ye fonksiyonun tanım kümesi veya tanım bölgesi, C'ye ise değer kümesi adı verilir. Burada x ve y bağımsız değişkenler, z ise bağımlı değişkendir. Tüm (x, y) sıralı ikililerini içeren iki boyutlu düzlem genellikle R^2 ile ifade edilir.

Daha açık ifade etmek gerekirse iki değişkenli bir f fonksiyonu her (x, y) sıralı ikilisi ile gösterilen girdiye, tek bir z çıktısını atayan bir kuraldır. Bu eşleşmede, her bir sıralı ikili daima tek bir elemanla eşlenmektedir. Şekil 6.1'de görüldüğü gibi ortada yer alan kare x ve y girdileri üzerinde bazı aritmetik işlemler yaparak z çıktısını üretmektedir.

İki değişkenli bir f fonksiyonu her (x, y) sıralı ikilisi ile gösterilen girdiye, tek bir z çıktısını atayan bir kuraldır.

Şekil 6.1

İki Değişkenli Fonksiyon



Örneğin uygulanması gereken kural "iki sayıyı birbiri ile çarpıp iki katını al ve ikinci sayının üç katını ekle" şeklinde olabilir. Bu sözel ifadeyi kısaca sembollerle gösterebiliriz.

$f(x, y) = 2xy + 3y$ ya da $z = 2xy + 3y$

(2,3) ikilisinin bu fonksiyon altındaki görüntüsünü, diğer bir deyişle $f(2,3)$ sayısını bulalım. Bunun için $2xy + 3y$ ifadesinde x yerine 2 ve y yerine 3 yazarız. Buna göre $f(2,3) = 2(2)(3) + 3(3) = 21$ olur.

$f(3,2)$ değeri ise $2(3)(2) + 3(2) = 18$ bulunur. Yani $f(2,3)$ değeri $f(3,2)$ değerinden farklıdır. Bu nedenle değişkenlerin sırasına dikkat edilmesi gerekir.

DİKKAT

$f(x, y) \neq f(y, x)$

İki Değişkenli Fonksiyonun Tanım Kümesi

Tek değişkenli fonksiyonlarda gördüğümüz gibi kuralın uygulandığı tüm girdi sayılarının kümesine tanım kümesi adı verilmektedir. Ancak iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesinin elemanları (x, y) gibi ikililerdir. Bu nedenle iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesine, düzlemin bir alt kümesi olduğu için, tanım bölgesi de denir. Düzlemin herhangi bir alt kümesi iki değişkenli bir fonksiyonun tanım bölgesi olarak alınabilir. Ancak iktisadi analizlerle bizim en sık karşılaşacağımız tanım bölgesi $\{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x, y \in R\}$ kümesidir. Örneğin $f(x, y)$ fonksiyonu bir üretim fonksiyonuysa ve x sermayeyi, y emeği temsil ediyorsa üretimin gerçekleşmesi için her iki girdiden de kullanmak gerektiğinden $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ olduğu varsayılır.

İki değişkenli fonksiyonun tanım kümesine, düzlemin bir alt kümesi olduğu için, tanım bölgesi denir.

$f(x, y) = \dfrac{x+2}{y-3}$ iki değişkenli bir fonksiyondur. $y = 3$ iken payda 0 olduğundan f'nin tanım kümesi $y \neq 3$ iken tüm (x, y) ikililerinden oluşur.

$g(x, y) = 5y$ fonksiyonu ise g'yi x ve y'nin bir fonksiyonu olarak tanımlar. Tanım kümesi gerçel sayıların tüm sıralı ikilileridir. Burada fonksiyonun değerleri seçilen x'ten bağımsızdır.

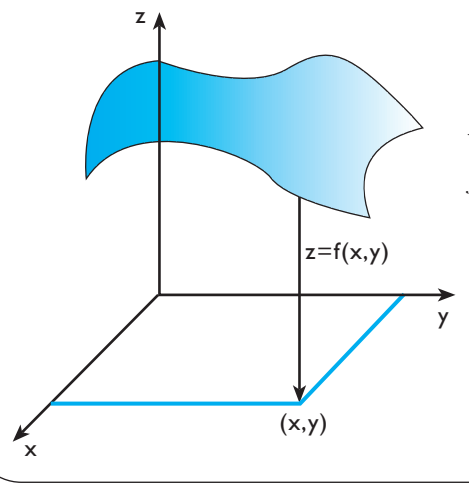
$z^2 = x^2 + y^2$ ise tanımladığımız anlamda bir fonksiyonel ilişki değildir. Çünkü her bir sıralı ikili tek bir elemanla eşlenmemektedir. Örneğin $x = 4$ ve $y = 3$ için $z^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ ve $z = \pm 5$ olur.

İki Değişkenli Fonksiyonun Grafiği

İki değişkenli bir fonksiyonun grafiği tüm $(x, y, f(x, y))$ noktalarını içeren 3 boyutlu uzayda bir yüzeydir.

Tek değişkenli bir fonksiyonun grafiğini çizmek için koordinatları sıralı ikililer tarafından belirlenen tüm noktaların birleştirilmesi yeterliydi. İki veya daha fazla bağımsız değişkenli fonksiyonların grafiksel gösterimi ise biraz daha karmaşıktır. İki değişkenli bir fonksiyon, düzlemin bir noktasını bir gerçel sayıyla eşlemesinden

dolayı, üç boyutlu uzayın noktalarıyla geometrik olarak temsil edilebilir. Yani f fonksiyonun grafiği tüm $(x, y, f(x, y))$ noktalarını içeren 3 boyutlu uzayda bir yüzeydir. f 'nin tanım kümesindeki her bir (x, y) sıralı ikilisine $(x, y, f(x, y))$ noktasını atarız. Bu türdeki tüm noktaların kümesi f 'nin grafiği olarak adlandırılır. Şekil 6.2'de görüldüğü gibi, fonksiyonun bağımlı değişkenlerinden oluşan ikili (x, y)'yi yatay düzlemde gösterirsek fonksiyonun değeri bu noktanın üzerinde yer alan ve yüksekliği z ile belirlenen yüzeydir. Fonksiyonun grafiğini elle çizmek kolay olmasa da üç boyutlu grafikler çizebilen bilgisayar programları yardımı ile bu işlem yapılabilir.



Şekil 6.2

İki Değişkenli Fonksiyon Grafiği

Kaynak: *Jacques I. Mathematics for Economics and Business, s.296.*

İkiden Fazla Değişkenli Fonksiyonlar

İktisatta incelediğimiz fonksiyonların çoğu ikiden fazla bağımsız değişken içerir. Örneğin bir ülkenin Gayri Safi Milli Hasıla (GSMH)'si, tasarruf, yatırım, tüketim, faiz, konjonktür gibi birçok değişkenin fonksiyonudur. Elbette değişken sayısı arttıkça matematiksel analiz daha karmaşık hâle gelmektedir. Çok değişkenli bir fonksiyonu matematiksel olarak şöyle ifade edebiliriz:

$n \in$ N olmak üzere, boş küme olmayan $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ ve C kümeleri verilsin. $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots\ldots, x_n \in A_n$ olmak üzere, tüm $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ sıralı n-lilerin kümesine $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ kümelerinin kartezyen çarpımı denir ve $A_1 \times A_2 \times \ldots\ldots \times A_n$ şeklinde gösterilir. Kısaca

$$A_1 \times A_2 \times \ldots\ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots\ldots, x_n \in A_n\} \text{ 'dir.}$$

Her bir $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots\ldots \times A_n$ n-lisine C kümesinden bir tek z elemanı atayan f kuralına $A_1 \times A_2 \times \ldots\ldots \times A_n$'den C'ye n-değişkenli fonksiyon denir ve

$$f : A_1 \times A_2 \times \ldots\ldots \times A_n \to C,\ z = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \text{ veya } f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$

şeklinde gösterilir. $A_1 \times A_2 \times \ldots\ldots \times A_n$ kümesine fonksiyonun tanım kümesi veya tanım bölgesi, C'ye ise değer kümesi denir.

Bir fonksiyonda, tanım kümesinin herhangi bir noktasına değer kümesinde karşılık gelen sayıya, fonksiyonun o noktadaki değeri denir. Fonksiyon değerlerinin kümesi ise görüntü kümesi olarak adlandırılır.

KISMİ TÜREV

$y = f(x)$ şeklindeki tek değişkenli fonksiyonda $f'(x)$ ile gösterilen türev, x'teki değişim sonucunda fonksiyonun değerindeki değişimi ölçüyordu. $z = f(x, y)$ biçimindeki çok değişkenli fonksiyonda da bağımsız değişkenlerdeki değişim sonucunda fonksiyonun değerinin nasıl değişeceğini öğrenmek isteyebiliriz. Örneğin $f(x, y)$ fonksiyonu, üretim sürecinde x ve y gibi iki farklı girdi kullanan bir firmanın kâr fonksiyonu ise, her iki girdideki değişim sonucunda kârın nasıl etkileneceğini bilmek firma açısından önemlidir.

$z = x^2 + 4y^3$ fonksiyonunu ele alalım. Önce y'nin sabit tutulduğunu varsayarsak bu durumda $4y^3$ sabit olacağından elimizde tek değişken kalır. z'nin x'e göre değişim oranı ise $\frac{dz}{dx} = \mathbf{2}x$ olarak belirlenir. Benzer şekilde x'i sabit tutup, y'deki değişimin z'yi nasıl etkileyeceğini de belirleyebiliriz. Bunun için x sabitken z'nin y'ye göre türevini almamız gerekir. Sonuç ise $\frac{dz}{dy} = \mathbf{12}y^{\mathbf{2}}$ olur. Elbette x ve y değişkenleri birlikte de değişebilir. Ancak şimdilik kısmi türev kavramını tanımak için değişkenlerden birinin sabit olduğunu varsayıyoruz.

Çok değişkenli fonksiyonlarda z'nin x'e göre kısmi türevini ifade etmek için dz/dx yerine $\partial z/\partial x$ ifadesi kullanılır. d ile ∂'nın değiştirilmesi ile yapılan bu küçük değişiklik diğer bağımsız değişkenler sabit tutularak sadece bir tanesindeki değişimin incelendiğini ifade etmektedir. Benzer şekilde x'i sabit tutup y'deki değişimin etkisini inceleyeceğimiz zaman da dz/dy yerine $\partial z/\partial y$ yazarız. Kısaca

$$z = x^2 + 4y^3 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \text{ ve } \frac{\partial z}{\partial y} = 12y^2 \text{ 'dir.}$$

$z = f(x, y)$ iki değişkenli fonksiyonunda, f'nin x'e göre kısmi türevi $\frac{\partial z}{\partial x}$ ya da $\frac{\partial f}{\partial x}$ ya da f_x şeklinde gösterilir.

Genel olarak $z = f(x, y)$ iki değişkenli fonksiyonunda, f'nin x'e göre kısmi türevi $\frac{\partial z}{\partial x}$ ya da $\frac{\partial f}{\partial x}$ ya da f_x şeklinde gösterilir ve y sabitken, fonksiyonun x'e göre türevi alınarak bulunur. Benzer olarak f'nin y'ye göre kısmi türevi de $\frac{\partial z}{\partial y}$ ya da $\frac{\partial f}{\partial y}$ ya da f_y şeklindedir ve x sabitken fonksiyonun y'ye göre türevi alınarak hesaplanır.

SIRA SİZDE 1

İki değişkenli bir f fonksiyonu $f(x,y) = xy^2 + x^2y$ ise f_x ve f_y kısmi türevlerini hesaplayınız.

Burada iki değişkenli fonksiyonların kısmi türevleri üzerine yoğunlaşsak da ikiden fazla değişkenli fonksiyonların da kısmi türevleri alınabilir. Çok değişkenli fonksiyonun genel gösterimi $y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ şeklindedir. Buradan $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ya da f_i $(i = 1,2,\ldots\ldots,n)$ ile gösterilen n tane kısmi türev bulunabilir. Bunu yaparken her seferinde fonksiyonun bir değişkene göre türevini alıp kalan $n - 1$ değişkenin sabit olduğunu kabul ederiz.

İkinci Dereceden Kısmi Türevler

İki değişkenli bir fonksiyonun türevini aldığımız zaman, gene iki değişkenli bir başka fonksiyon elde ederiz. Yani $z = f(x, y)$ ise z'nin x ve y'nin bir fonksiyonu olduğunu biliyoruz. Aynı zamanda f_x ve f_y de x ile y'nin birer fonksiyonudur. Eğer f'nin ikinci dereceden kısmi türevlerini elde etmek istersek, f_x ve f_y'nin tekrar türevini alabiliriz. Buradan dört farklı ikinci dereceden kısmi türev elde edebiliriz.

Fonksiyonun x'e göre iki kez kısmi türevi alınırsa

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ ya da } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ ya da } f_{xx}$$

Fonksiyonun y'ye göre iki kez kısmi türevi alınırsa

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ ya da } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ ya da } f_{yy}$$

Fonksiyonun önce x'e sonra y'ye göre kısmi türevi alınırsa

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{ ya da } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ ya da } f_{yx}$$

Fonksiyonun önce y'ye sonra x'e göre kısmi türevi alınırsa

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ ya da } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ ya da } f_{xy}$$

$f(x, y) = x^2y + x^2y^2$ fonksiyonunun ikinci dereceden dört kısmi türevini belirleyiniz.

SIRA SİZDE 2

f_{xy} ve f_{yx} türevlerine çapraz kısmi türev adı verilir. Çoğu zaman bir fonksiyonun çapraz kısmi türevleri birbirine eşittir. Yani türev alma sırası önemli değildir. Matematikte $f_{xy} = f_{yx}$ kuralının geçerli olmadığı fonksiyonlarla karşılaşılabilir ancak iktisadi analizlerde ve bu kitap içerisinde inceleyeceğimiz fonksiyonlarda bu kuralın geçerli olduğunu söyleyebiliriz.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şeklindeki çok değişkenli bir fonksiyonda da ikinci dereceden kısmi türevler benzer şekilde bulunabilir. Örneğin $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_1x_3^2 + 5x_2^4$ fonksiyonunda $f_{31} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}$ kısmi türevini bulmak için önce fonksiyonun x_1'e göre kısmi türevi alınıp sonra da x_3'e göre kısmi türevi alınır. Dolayısıyla

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 + x_3^2 \text{ bulunur. Buradan } f_{31} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = 2x_3 \text{ olur.}$$

Kısmi türev, herhangi bir değişkendeki değişimin, diğer bütün değişkenler sabit tutulduğunda etkisini göz önüne alır. Bu iktisatta bize çok tanıdık olan bir kavramla aynı anlama gelmektedir. "Ceteris Paribus" yani diğer şeylerin sabit kaldığı varsayımı. İktisatta birçok analiz sadece bir değişken üzerinde yoğunlaşarak diğer faktörlerin sabit olduğu varsayımına göre yapılmaktadır. Örneğin iktisada giriş derslerinizde gördüğünüz talep kanununa göre diğer şeyler sabitken (tüketicinin geliri, ikame ve tamamlayıcı malların fiyatları.....) bir malın fiyatı ile talep edilen miktarı arasında negatif ilişki vardır. Bu durumda herhangi bir talep fonksiyonunda ceteris paribus varsayımı altında kısmi türev uygulayarak fiyatın bir birim artması sonucunda talep edilen miktarın ne kadar azalacağını belirleyebiliriz.

$y = f(x)$ fonksiyonunda y'nin x'e göre değişim oranı dy/dx türevi ile bulunabiliyordu. Eğer x'teki değişim yani Δx çok küçük olursa, y'deki değişimi hesaplamak için $\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x$ formülü kullanılabilir. Δx değeri küçüldükçe Δy değerini doğru hesaplama şansımız artar. Tek değişkenli bir fonksiyon kullanarak gösterdiğimiz bu kuralı, kısmi türevi kullanarak çok değişkenli fonksiyonlara da uyarlayabiliriz.

$z = f(x, y)$ fonksiyonunda, y sabitken x küçük miktarda Δx kadar değişirse z'deki değişim yaklaşık olarak $\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x$ kadar olur. Benzer şekilde x sabitken, y küçük miktarda Δy kadar değişirse z'deki değişim yaklaşık olarak $\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ kadar olur. x ve y'nin birlikte değişmesi durumunda, z'deki toplam değişim, x ve y'nin bireysel değişimlerinin toplamı kadardır. Yani

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y \quad \text{olur.}$$

Bu ifade z'deki değişimi yaklaşık olarak hesaplasa da, Δx ve Δy sıfıra yaklaştıkça hata payı azalacağı için formül bir eşitliğe dönüşür.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Burada dx, dy ve dz diferansiyellerdir ve Δx, Δy ve Δz'nin limit değerlerini temsil ederler.

Örneğin toplam hasılanın, işçi ücretleri ile reklam harcamalarının fonksiyonu olduğu aşağıdaki çok değişkenli fonksiyonu ele alalım.

$TR = 5W^2A^3$ Burada TR toplam hasılayı, W işçi ücretlerini ve A reklam harcamalarını ifade etmektedir. Önce toplam hasılanın diferansiyelini belirleyelim.

$$d(TR) = \frac{\partial(TR)}{\partial(W)}dW + \frac{\partial(TR)}{\partial(A)}dA$$

$$= \mathbf{5(2WA^3)}dW + \mathbf{(5W^2 3A^2)}dA$$

Şimdi de işçi ücretlerinin %5 artması ve reklam harcamalarının değişmemesi durumunda toplam hasılanın yaklaşık olarak nasıl etkileneceğini bulalım.

Ücretler %5 arttığına göre $\Delta W = 5W/100$ olur. Reklam harcamaları değişmediğine göre $\Delta A = 0$'dır. Bu değişim değerlerini eşitlikte yerine koyarsak

$$\Delta(TR) \approx \frac{\partial(TR)}{\partial(W)}\Delta W + \frac{\partial(TR)}{\partial(A)}\Delta A$$

$$\approx \mathbf{5(2WA^3)}\Delta W + \mathbf{(15W^2A^2)}\Delta A$$

$$\approx \frac{\mathbf{5(2WA^3)}}{\mathbf{1}} \times \frac{\mathbf{5W}}{\mathbf{100}} + \mathbf{0}$$

$$\approx \frac{\mathbf{5W^2A^3}}{\mathbf{1}} \; \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{100}}$$

$5W^2A^3 = TR$ olduğundan

$$\Delta(TR) \approx \frac{TR}{\mathbf{1}} \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{100}}$$ Yani toplam hasıla yaklaşık olarak %10 artar.

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN İKTİSADİ UYGULAMALARI

Esneklikler

Tek değişkenli fonksiyonları anlatırken talebin fiyatın bir fonksiyonu olduğunu ifade edip fiyatın artması durumunda talep edilen miktarın azalacağını söylemiştik. Şimdi çok değişkenli fonksiyonları kullanarak bu basitleştirilmiş ifadeyi geliştirerek talebi etkileyen diğer faktörleri de inceleyebiliriz. Bir malın talebinin (Q), malın fiyatına (P), ikame veya tamamlayıcı malın fiyatına (P_i) ve tüketicinin gelirine (Y) bağlı olduğunu varsayalım. Bunu çok değişkenli bir fonksiyon kullanarak $Q = f(P, P_i, Y)$ şeklinde gösterebiliriz. Talebi etkileyen bu üç değişkendeki değişime talebin ne kadar duyarlı olduğunu belirlemek için esneklik kavramını kullanırız.

İnceleyeceğimiz ilk esneklik türü daha önce tek değişkenli fonksiyonlar bölümünde de kullanılan talebin fiyat esnekliği olsun. Bu çok değişkenli fonksiyonda talebin fiyat esnekliği, ikame malının fiyatı ve tüketici geliri sabitken, malın kendi fiyatındaki yüzde değişim sonucunda, talepteki yüzde değişimi ifade etmektedir.

Kısaca $E_p = -\dfrac{P}{Q} \times \dfrac{\partial Q}{\partial P}$

Burada kısmi türevi kullanmamızın nedeni, Q'nun birçok değişkenin fonksiyonu olması ve P_i ve Y'nin sabit tutulmasıdır. Benzer şekilde, talebin ikame veya tamamlayıcı malın fiyatındaki değişime ne kadar duyarlı olduğunu belirlemek için de talebin çapraz fiyat esnekliği kavramını kullanırız. Malın kendi fiyatı ve tüketici geliri sabitken, ikame veya tamamlayıcı malın fiyatındaki yüzde değişimin sonucunda talebin hangi oranda değişeceğini belirlemek için $E_{P_i} = \dfrac{P_i}{Q} \times \dfrac{\partial Q}{\partial P_i}$ formülü kullanılır. Çapraz fiyat esnekliğinin işareti alternatif malın türüne göre değişir. Eğer alternatif mal, ikame malsa P_i arttığında, Q da artar. Çünkü tüketiciler nispi olarak daha ucuz kalan maldan tüketmeyi tercih ederler. Dolayısıyla $\dfrac{\partial Q}{\partial P_i} > \mathbf{0}$ olacağından $E_{P_i} > 0$ olacaktır. Alternatif malın tamamlayıcı bir mal olması durumunda ise alternatif malın fiyatının artması sonucunda talep azalır. Dolayısıyla $\dfrac{\partial Q}{\partial P_i} < \mathbf{0}$ olacağından $E_{P_i} < 0$ olur.

Talebin gelir esnekliği ise, gelirdeki yüzde değişim sonucunda talebin nasıl etkileneceğini inceler. $E_Y = \dfrac{Y}{Q} \times \dfrac{\partial Q}{\partial Y}$ formülü ile hesaplanır. Talebin gelir esnekliği pozitif ya da negatif değer alabilir. Normal mallar için gelir arttığında talep de artacağından gelir esnekliği pozitif çıkar. Düşük mallarda ise gelir artışı sonucunda talep azalacağından gelir esnekliği negatiftir.

Örneğin talep fonksiyonu $Q = 500 - 3P - 2P_i + 0{,}001Y$ şeklinde verilmiş olsun. P=20, P_i=30 ve Y=5000 olması durumunda talebin fiyat esnekliğini, çapraz fiyat esnekliğini ve gelir esnekliğini hesaplayalım.

Öncelikle P=20, P_i=30 ve Y=5000 iken talep edilen miktarı hesaplayalım.

Q = 500–3(20)–2(30)+0,001(5000)=430

Fiyat esnekliğini hesaplayabilmek için Q'nun P'ye göre kısmi türevine ihtiyacımız var. $\frac{\partial Q}{\partial P} = -3$ Buradan $E_p = -\frac{P}{Q} \times \frac{\partial Q}{\partial P} = -\frac{20}{430} \times (-3) = 0,14$ bulunur.

Çapraz fiyat esnekliğini bulmak için ise öncelikle fonksiyonun alternatif malın fiyatına göre kısmi türevini hesaplarız.

$\frac{\partial Q}{\partial P_i} = -2$ Buradan $E_{P_i} = \frac{30}{430} \times (-2) = -0,14$ bulunur.

Son olarak talebin gelir esnekliğini bulmak için fonksiyonun gelire göre kısmi türevini alırız. $\frac{\partial Q}{\partial Y} = 0,01$ Buradan $E_Y = \frac{Y}{Q} \times \frac{\partial Q}{\partial Y} = \frac{5000}{430} \times (0,01) = 0,12$ bulunur.

SIRA SİZDE 3

Örneğe göre fonksiyonda yer alan malların ikame ya da tamamlayıcı mallardan hangisi olduğunu belirleyiniz.

Fayda Fonksiyonu

Fayda fonksiyonu, tüketilen mal miktarlarının bir fonksiyonu olarak tüketiciye sağlanan tatmindir.

Firmaların kârlarını maksimize etmeye çalışmaları gibi bireyler da faydalarını maksimize etmeye çalışırlar. Bunu gerçekleştirmek için de ne kadar çalışıp ne kadar boş zaman geçireceklerine ya da farklı malların hangisinden ne kadar tüketeceklerine karar vermek durumundadırlar. Bu tercihleri sayısal olarak ifade edebilmek için iktisatta U ile gösterilen fayda fonksiyonlarını kullanırız. Bir tüketicinin fayda fonksiyonu, toplam fayda veya tüketilen mal miktarlarının bir fonksiyonu olarak tüketiciler tarafından sağlanan tatmin olarak açıklanabilir. Eğer tüketici M_1 malından x_1 birim ve M_2 malından x_2 birim tüketerek fayda sağlıyorsa fayda fonksiyonu $U = U(x_1, x_2)$ şeklinde gösterilebilir. Bu fonksiyonu daha fazla malın tüketimine olanak sağlayacak şekilde genişletmek elbette mümkündür.

Herhangi bir malı tüketen tüketicinin marjinal faydası, diğer bütün malların tüketimi değişmediği durumda, sözkonusu malın tüketimindeki birim başına artışın faydada sağladığı artış olarak tanımlanır. Yani fayda fonksiyonunun herhangi bir malın tüketim miktarına göre kısmi türevini alırsak bulduğumuz değere o malın marjinal faydası denir. $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ kısmi türevi bize x_i malının marjinal faydasını verir (MU_{x_i}). Eğer x_i küçük miktarda Δx_i kadar artarsa ve diğer değişken sabit tutulursa, faydadaki değişim yaklaşık olarak

$\Delta U \approx \frac{\partial U}{\partial x_i} \Delta x_i$ kadar olur. Eğer x_1 ve x_2 birlikte değişirse faydadaki değişim

$\Delta U \approx \frac{\partial U}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \Delta x_2$ formülü ile hesaplanır.

Bir malın tüketim miktarı arttıkça, tüketilen son birim, bir önceki birime göre daha az fayda sağlar. Buna iktisatta azalan marjinal fayda kanunu diyoruz. Bu ka-

nunu fayda fonksiyonu üzerinden matematiksel olarak gösterebiliriz. $\frac{\partial U}{\partial x_1}$ kısmi türevi M_1 malının marjinal faydasını veriyordu. Marjinal faydanın x_1'e göre tekrar kısmi türevini alırsak $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}$ değeri negatif çıkar. Yani M_1 malının tüketimi arttıkça marjinal faydası azalmaktadır.

Örneğin bir tüketicinin fayda fonksiyonunun $U = 1000x_1 + 450x_2 + 5x_1x_2 - 2x_1^2 - x_2^2$ olduğunu varsayalım. Burada x_1 haftalık boş zaman, x_2 ise haftalık gelirdir. $x_1 = 140$ ve $x_2 = 400$ olması durumunda boş zamanın ve gelirin marjinal faydasını hesaplayalım.

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \mathbf{1000 + 5x_2 - 4x_1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \mathbf{450 + 5x_1 - 2x_2}$$

Boş zaman ve gelir (140,400) ise

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \mathbf{1000 + 5(400) - 4(140) = 2440} \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = \mathbf{450 + 5(140) - 2(400) = 350}$$

Şimdi de tüketicinin iki saat fazladan çalışarak haftalık gelirini ₺40 arttırması sonucunda faydasında meydana gelecek değişimi hesaplayalım.

Eğer haftalık çalışma saati iki saat artıyorsa, boş zaman da 2 saat azalıyor demektir. Yani $\Delta x_1 = -2$ ve $\Delta x_2 = 40$ olur. Faydadaki değişim ise $\Delta U \approx \frac{\partial U}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}\Delta x_2$ formülü ile hesaplanır. $\Delta U \approx 2440(-2)+350(40)=9120$ olur.

Azalan marjinal fayda kuralının burada da geçerli olduğunu ikinci dereceden kısmi türevlerle gösterebiliriz.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = \mathbf{-4 < 0} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = \mathbf{-2 < 0}$$

Fayda fonksiyonlarının grafik gösterimi farksızlık eğrileri ile olur. $U = f(x_1, x_2)$ fonksiyonu için oluşturulacak farksızlık eğrisi tüketicinin aynı fayda düzeyinde kalması koşulu ile x_1 ve x_2 mallarından tüketebileceği farklı miktarları göstermektedir. Farksızlık eğrisinin eğimi genellikle negatif olur. Çünkü tüketici bir maldan daha az tüketiyorsa aynı fayda düzeyinde kalabilmek için diğer maldan daha fazla tüketmelidir.

Farksızlık eğrisinin eğimine Marjinal ikame oranı (MRS) adı verilir. Bu bize x_1 bir birim azalırsa aynı fayda düzeyinde kalmak için x_2'nin ne kadar artması gerektiğini verir. MRS x_1 ve x_2 mallarının marjinal faydaları kullanılarak hesaplanabilir.

Faydadaki toplam değişimin $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)dx_2$ olduğunu biliyoruz.

Verilen bir farksızlık eğrisi üzerinde fayda değişmediğine göre $dU = 0$'dır. Eşitlikte dU yerine 0 koyarak dx_2/dx_1 (farksızlık eğrisinin eğimi) değerine ulaşabiliriz.

$$0 = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right) dx_2$$

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right) dx_2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right) dx_1$$

$$-MU_{x_2}\, dx_2 = MU_{x_1}\, dx_1$$

$$\frac{-MU_{x_2}\, dx_2}{dx_1} = \frac{-MU_{x_1}}{1}$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{MU_{x_1}}{MU_{x_2}}$$

Yani farksızlık eğrisinin eğimi MRS, x_1'in marjinal faydasının x_2'nin marjinal faydasına oranıdır.

SIRA SİZDE 4

Fayda fonksiyonu $U = x_1^{1/2}\, x_2^{1/2}$ ise marjinal ikame oranını x_1 ve x_2 cinsinden belirleyiniz.

Üretim Fonksiyonu

Üretim fonksiyonunda çıktı (Q), sermaye (K) ve emek (L) girdilerinin fonksiyonu olarak açıklanır:

$$Q = f\ (K,\ L)$$

Sermayenin marjinal ürünü (MP_K) emek girdisi sabitken, sermaye girdisindeki bir birim artışın çıktıda ortaya çıkaracağı artış olarak tanımlanır ve üretim fonksiyonunun sermeyeye göre kısmi türevi alınarak bulunur.

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K}$$

Emek girdisi sabitken sermaye küçük miktarda ΔK kadar değişirse çıktıdaki değişim $\Delta Q \approx \frac{\partial Q}{\partial K}\Delta K$ formülü ile hesaplanır.

Emeğin marjinal ürünü (MP_L) ise sermaye girdileri sabitken, emek girdisindeki bir birim artışın çıktıda ortaya çıkaracağı artıştır ve üretim fonksiyonunun emeğe göre kısmi türevi alınarak bulunur.

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}$$

Sermaye girdisi sabitken emek küçük miktarda ΔL kadar değişirse çıktıdaki değişim $\Delta Q \approx \frac{\partial Q}{\partial L}\Delta L$ formülü ile hesaplanır.

Sermaye ve emek girdileri birlikte değiştiğinde ise çıktıdaki toplam değişim yaklaşık olarak $\Delta Q \approx \frac{\partial Q}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial Q}{\partial L}\Delta L$ kadar olur.

Üretim fonksiyonunun grafiği eş ürün eğrileri ile gösterilebilir. Eş ürün eğrisi aynı çıktı düzeyini sağlayan emek ve sermaye girdilerinin farklı bileşimleridir. Eş ürün eğrisinin eğimine Marjinal Teknik İkame Oranı (MRTS) adı verilir. Eş ürün eğ-

risi üzerindeki herhangi bir noktada ($L=L_0$, $K=K_0$) eğimin değeri, emekteki bir birimlik artış sonucunda, sermayenin ne kadar azalacağının ölçüsüdür.

Eş ürün eğrisinin eğimi, emek ve sermayenin marjinal ürünleri cinsinden ifade edilebilir. Çıktıdaki toplam değişim $dQ = \left(\frac{\partial Q}{\partial L}\right)dL + \left(\frac{\partial Q}{\partial K}\right)dK$ formülü ile hesaplanıyordu. Eş ürün eğrisi üzerinde çıktı miktarı sabit olduğundan $dQ = 0$ olur. Bunu formülde yerine koyarak dK/dL ifadesine ulaşabiliriz.

$$dQ = \left(\frac{\partial Q}{\partial L}\right)dL + \left(\frac{\partial Q}{\partial K}\right)dK$$

$$-\left(\frac{\partial Q}{\partial K}\right)dK = \left(\frac{\partial Q}{\partial L}\right)dL$$

$$-MP_K dK = MP_L dL$$

$$\frac{-MP_K dK}{dL} = \frac{MP_L}{1}$$

$$\frac{dK}{dL} = \frac{MP_L}{MP_K} = MRTS$$

Şimdi bu formülü kullanarak Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun genel biçimi için marjinal teknik ikame oranını belirleyelim.

$$Q = AL^{\alpha}K\beta$$

$$MRTS = \frac{dK}{dL} = -\frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K} = -\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{A\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}}{A\beta L^{\alpha}K^{\beta-1}}$$

$$= -\frac{\alpha K^{\beta}K^{-\beta+1}}{\beta L^{\alpha}L^{-\alpha+1}} = -\frac{\alpha K}{\beta L}$$

Üretim Fonksiyonunun Homojenliği ve Ölçeğe Göre Getiri

$Q = f(K, L)$ biçimindeki bir üretim fonksiyonunda, herhangi bir n sayısı için $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^n f(K, L)$ ise fonksiyonun homojen olduğu söylenir. Hem sermaye hem de emek girdisi λ ile çarpıldığında, λ'yı ortak çarpan olarak fonksiyonun dışına çıkartabiliriz. λ'nın kuvveti olan n fonksiyonun homojenlik derecesidir. Homojenlik derecesini bilmek bizim için önemlidir, çünkü bu bize ölçeğe göre getiri konusunda bilgi vermektedir.

$n = 1$ ise fonksiyon ölçeğe göre sabit getiri sergiler. Yani girdilerdeki artış oranı ile çıktıdaki artış oranı aynıdır.

$n < 1$ ise fonksiyon ölçeğe göre azalan getiri sergiler. Yani girdiler belli bir oranda arttırıldığında, çıktıdaki artış bundan daha az olur.

$n > 1$ olduğunda fonksiyon ölçeğe göre artan getiri sergiler. Yani girdiler belli bir oranda arttırıldığında, çıktıdaki artış, bundan daha fazla olur.

$Q = 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}$ fonksiyonu kaçıncı dereceden homojendir. Bu fonksiyonda ölçeğe göre getiri hakkında ne söyleyebilirsiniz?

SIRA SİZDE 5

Üretim fonksiyonlarının iktisatta çok sık kullanılan özel bir türü Cobb-Douglas üretim fonksiyonudur ve $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ şeklinde gösterilir. Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun $\alpha + \beta$ derecesinde homojen olduğunu rahatlıkla gösterebiliriz.

$f(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$ Burada K ve L yerine λK ve λL yazarsak

$$\begin{aligned} f(\lambda K, \lambda L) &= A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} \\ &= A\lambda^{\alpha}K^{\alpha}\lambda^{\beta}L^{\beta} \\ &= \lambda^{\alpha+\beta}(AK^{\alpha}L^{\beta}) \\ &= \lambda^{\alpha+\beta} f(K, L) \end{aligned}$$

Dolayısıyla Cobb-Douglas üretim fonksiyonunda ölçeğe göre getiriler de şöyle olur:

$\alpha + \beta < 1$ ise ölçeğe göre azalan getiri

$\alpha + \beta = 1$ ise ölçeğe göre sabit getiri

$\alpha + \beta > 1$ ise ölçeğe göre artan getiri

Euler Teoremi

Homojen fonksiyonların sonuçları ile ilgili geliştirilen önemli fonksiyonlardan biri de Euler teoremidir. Buna göre

$$K\frac{\partial f}{\partial K} + L\frac{\partial f}{\partial L} = nf(K, L) \text{ 'dir.}$$

Dolayısıyla birinci dereceden homojen bir fonksiyon için eşitliğin sağ tarafı toplam çıktı miktarını verir. Böyle bir fonksiyonda sermaye ile sermayenin marjinal ürününü çarpıp buna emek ile emeğin marjinal ürününün çarpımını eklersek bize toplam çıktı miktarını verecektir.

Örneğin $Q = K^2 + 2L^2$ şeklindeki bir üretim fonksiyonuna Euler Teoremi'ni uygularsak $K\frac{\partial Q}{\partial K} + L\frac{\partial Q}{\partial L} = K(2K) + L(4L) = 2K^2 + 4L^2 = 2(K^2 + 2L^2) = 2Q$ olur. Dolayısıyla bu üretim fonksiyonunun homojenlik derecesi 2'dir.

Azalan Marjinal Ürün

Bir üreticinin hangi koşullarda üretimini sürdürdüğünü kısmi türevleri kullanarak özetleyebiliriz. Normal olarak bir üretici, girdi miktarı arttığında çıktının da artmasını ister. Bunun için emeğin ve sermayenin marjinal ürününün pozitif olması gerekir. Ancak bir girdinin kullanım miktarı artmaya devam ederse çıktıdaki artış hızı genellikle azalır. Yani çıktı artmaya devam eder ancak azalarak artar. Bu durum da ikinci dereceden kısmi türevin negatif olması ile gösterilir. Kısaca

Emek girdisi için $MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} > 0$ ve $\frac{d(MP_L)}{dL} = \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0$

Sermaye girdisi için $MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} > 0$ ve $\frac{d(MP_K)}{dK} = \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0$

Örneğin $Q = K^{\frac{1}{6}}L^{\frac{1}{2}}$ şeklindeki bir üretim fonksiyonunda bu kuralın geçerli olup olmadığını inceleyelim. Öncelikle emeğin marjinal ürününü belirleyelim:

$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{1}{2} K^{\frac{1}{6}} L^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt[6]{K}}{\sqrt[2]{L}} > 0$ Emeğin marjinal ürünü her zaman pozitiftir. Yani kullanılan emek miktarı arttıkça üretim düzeyi de artar. Şimdi de fonksiyonun ikinci dereceden kısmi türevini alalım.

$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\partial Q}{\partial L}\right) = -\frac{1}{4} K^{\frac{1}{6}} L^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \frac{\sqrt[6]{K}}{\sqrt[2]{L^3}} < 0$ Yani emeğin marjinal ürünü azalmaktadır. Bunun nedeni de sermaye düzeyi sabitken emek girdisinin arttırılması sonucunda çıktıda meydana gelen artışın öncekilere göre daha az olmasıdır. Aynı şey sermaye girdisi için de geçerlidir.

Kâr Fonksiyonu

Firmanın üretim fonksiyonu ile ilişkili olan bir başka konu da kâr fonksiyonudur. Çünkü çoğu ticari işletmenin nihai amacı kârını maksimize etmektir. Üretimde kullanılan sermaye ve emek girdilerinin bir fonksiyonu olarak üretim fonksiyonunun $Q = \sqrt[6]{K}\sqrt{L} = K^{\frac{1}{6}} L^{\frac{1}{2}}$ şeklinde olduğunu varsayalım. Firma sermaye ($K \geq 0$) ve emeğin ($L \geq 0$) çeşitli bileşimlerini kullanarak belli bir üretim ($Q \geq 0$) gerçekleştirmektedir. Bu firmanın ürün ve faktör piyasalarında fiyat alıcısı olduğunu varsayalım. Eğer üretilen ürünün fiyatı P, sermayenin fiyatı olan faiz r ve emeğin fiyatı olan ücret oranı w ile gösterilirse, K birim sermaye ve L birim emek kullanan firmanın kâr fonksiyonu

$$\pi(K,L) = TR - TC$$
$$\pi(K,L) = PQ - rK - wL$$
$$= PK^{\frac{1}{6}} L^{\frac{1}{2}} - rK - wL \qquad \text{olur.}$$

Verilen herhangi fiyat, faiz ve ücret değerleri için, değerler yerlerine koyularak kâr fonksiyonu belirlenebilir. Örneğin P=12, r=1 ve w=1 için kâr fonksiyonu $\pi(K,L) = 12K^{\frac{1}{6}} L^{\frac{1}{2}} - K - 3L$ dir.

Özet

AMAÇ 1

Çok değişkenli fonksiyon kavramını tanımlayıp iki ve daha fazla değişkenli fonksiyonları açıklamak

İki değişkenli bir f fonksiyonu her (x, y) sıralı ikilisi ile gösterilen girdiye, tek bir z çıktısını atayan bir kuraldır. Bu eşleşmede, her bir sıralı ikili daima tek bir elemanla eşlenmektedir. Kuralın uygulandığı tüm girdi sayılarının kümesine tanım kümesi adı verilmektedir. Ancak iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesinin elemanları gibi ikililerdir. Bu nedenle iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesine, düzlemin bir alt kümesi olduğu için, tanım bölgesi de denir. İki değişkenli bir fonksiyon, düzlemin bir noktasını bir gerçel sayıyla eşlemesinden dolayı, üç boyutlu uzayın noktalarıyla geometrik olarak temsil edilebilir. Yani f fonksiyonun grafiği tüm $(x, y, f(x, y))$ noktalarını içeren 3 boyutlu uzayda bir yüzeydir. İktisatta incelediğimiz fonksiyonların çoğu ikiden fazla bağımsız değişken içerir. Örneğin bir ülkenin Gayri Safi Yurt İçi Hasıla (GSMH)'sı, tasarruf, yatırım, tüketim, faiz, konjonktür gibi birçok değişkenin fonksiyonudur. Çok değişkenli bir fonksiyon kısaca $y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ şeklinde gösterilebilir.

AMAÇ 2

Birinci ve ikinci dereceden kısmi türevlerin nasıl alındığını açıklamak

$z = f(x, y)$ biçimindeki çok değişkenli fonksiyonda bağımsız değişkenlerdeki değişim sonucunda fonksiyonun değerinin nasıl değişeceğini öğrenmek isteyebiliriz. Çok değişkenli fonksiyonlarda z'nin x'e göre kısmi türevini ifade etmek için dz/dx yerine $\partial z/\partial x$ ifadesi kullanılır. d ile ∂'nın değiştirilmesi ile yapılan bu küçük değişiklik diğer bağımsız değişkenler sabit tutularak sadece bir tanesindeki değişimin incelendiğini ifade etmektedir. Benzer şekilde x'i sabit tutup y'deki değişimin etkisini inceleyeceğimiz zaman da dz/dy yerine $\partial z/\partial y$ yazarız. Genel olarak $z = f(x, y)$ iki değişkenli fonksiyonunda, f'nin x'e göre kısmi türevi $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ya da $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ya da f_x şeklinde gösterilir ve y sabitken, fonksiyonun x'e göre türevi alınarak bulunur. Benzer olarak f'nin y'ye göre kısmi türevi de $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ya da $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ya da f_y şeklindedir ve x sabitken fonksiyonun y'ye göre türevi alınarak hesaplanır. Eğer f'nin ikinci dereceden kısmi türevlerini elde etmek istersek, f_x ve f_y'nin tekrar türevini alabiliriz. Buradan dört farklı ikinci dereceden kısmi türev elde edebiliriz. Bunlar f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} ve f_{yx}'tir. f_{xy} ve f_{yx} türevlerine çapraz kısmi türev adı verilir. Çoğu zaman bir fonksiyonun çapraz kısmi türevleri birbirine eşittir.

AMAÇ 3

Çok değişkenli fonksiyonları ve kısmi türevi iktisadi konularda kullanmak

Bir malın talebinin (Q), malın fiyatına (P), ikame veya tamamlayıcı malın fiyatına (P_i) ve tüketicinin gelirine (Y) bağlı olduğunu varsayalım. Bunu çok değişkenli bir fonksiyon kullanarak $Q = f(P, P_i, Y)$ şeklinde gösterebiliriz. Talebi etkileyen bu üç değişkendeki değişime talebin ne kadar duyarlı olduğunu belirlemek için esneklik kavramını kullanırız. Bu çok değişkenli fonksiyon ve kısmi türev kullanılarak talebin fiyat esnekliği, çapraz fiyat esnekliği ve gelir esnekliği belirlenebilir. Bir tüketicinin fayda fonksiyonu, toplam fayda veya tüketilen mal miktarlarının bir fonksiyonu olarak tüketiciler tarafından sağlanan tatmin olarak açıklanabilir. Eğer tüketici M_1 malından x_1 birim ve M_2 malından x_2 birim tüketerek fayda sağlıyorsa fayda fonksiyonu $U = U(x_1, x_2)$ şeklinde gösterilebilir. Fayda fonksiyonunun herhangi bir malın tüketim miktarına göre kısmi türevini alırsak bulduğumuz değere o malın marjinal faydası denir. $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ kısmi türevi bize x_i malının marjinal faydasını verir. Üretim fonksiyonunda çıktı (Q), sermaye (K) ve emek (L) girdilerinin fonksiyonu olarak açıklanır: $Q = f(K, L)$ Sermayenin marjinal ürünü (MP_K) emek girdisi sabitken, sermaye girdisindeki bir birim artışın çıktıda ortaya çıkaracağı artış olarak tanımlanır ve üretim fonksiyonunun sermeyeye göre kısmi türevi alınarak bulunur. Emeğin marjinal ürünü (MP_L) ise sermaye girdileri sabitken, emek girdisindeki bir birim artışın çıktıda ortaya çıkaracağı artıştır ve üretim fonksiyonunun emeğe göre kısmi türevi alınarak bulunur. Üretim fonksiyonlarının iktisatta çok sık kullanılan özel bir türü Cobb-Douglas üretim fonksiyonudur ve $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ şeklinde gösterilir.

MATEMATİKSEL İKTİSAT

7

Amaçlarımız

Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- İktisadi fonksiyonlarda optimizasyon kavramını tanımlayabilecek,
- Tek Değişkenli Fonksiyonların maksimum ve minimum noktalarını bulabilecek,
- İki Değişkenli Fonksiyonların maksimum ve minimum noktalarını bulabilecek,
- Üç Değişkenli Fonksiyonların maksimum ve minimum nokatalarını bulabilecek bilgi ve becerilere sahip olacaksınız.

Anahtar Kavramlar

- Optimizasyon
- Kâr Fonksiyonu
- Hessian Matrisi
- Birinci ve İkinci Türev Yöntemi
- Marjinal Hasıla
- Marjinal Maliyet
- Üretim

İçindekiler

Matematiksel İktisat → Kısıtsız Optimizasyon →

- OPTİMİZASYON
- TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA OPTİMİZASYON
- ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA OPTİMİZASYON
- İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA OPTİMİZASYON
- ÜÇ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA OPTİMİZASYON

Kısıtsız Optimizasyon

OPTİMİZASYON

Kıt kaynaklarla sınırsız ihtiyaçların karşılanması probleminin çözümüyle ilgilenen iktisat bilimi temelde ekonomik birimlerin (bireyler, firmalar, hükümetler vs. gibi) karar alma ya da seçim yapma süreçlerini inceler. Seçim yapma problemiyle karşı karşıya olan ekonomik birimlerin "Homo Economicus" diğer bir ifadeyle rasyonel davrandıkları varsayımı yapılmaktadır. Bu bağlamda rasyonel davranan bu ekonomik birimlerin, diğer koşullar sabitken (ceteris paribus), kendisi için en iyi olanı yapmaya çalıştığı varsayılır. Bu varsayım en basit anlamı ile optimizasyon olarak tanımlanabilir. Matematiksel olarak ise bağımsız değişken ve bağımlı değişken arasındaki ilişkiyi ifade eden fonksiyonun birinci türevini sıfır yapan nokta ya da noktalar optimal (maksimum ya da minimum) değerler olarak ifade edilir. Bu optimal noktayı bulma yöntemine de optimizasyon adı verilir.

Ekonomi teorisi genellikle ekonomik değişkenler arasındaki ilişkileri ve bu ilişkiler sonucunda ulaşılmak istenen sonuçları iktisadi modellerle açıklamaya çalışır. Her iktisadi model belirli bir amaç doğrultusunda ulaşılmak istenen sonuçların optimum yapılması veya denge durumlarıyla ilgilenir. Dolayısıyla, "Bir firmanın kârını maksimum yapabilmek veya maliyetini minimum yapabilmesi için üretim miktarı ne olmalıdır?", "Bir bireyin faydasını maksimum yapan veya harcamasını minimum yapan tüketim miktarları ne olmalıdır?", "Hükümetler ekonomik büyümeyi maksimum yapmak için ne tür programlar uygulamalıdır?", " Bir ülkenin tasarruf, tüketim, yatırım, faiz, enflasyon vb. ekonomik değişkenlerinin optimal düzeyi ne olmalıdır" gibi sorunları çözmek için izlediği yöntemlerin her biri optimal seçimdir.

Optimizasyon, kısıtlı ve kısıtsız olmak üzere iki biçimde elde edilir. Bu ünitede kısıtsız optimizasyon kavramı tanıtılacak ve amacı doğrultusunda karar alan ekonomik birimlerin (kısıtsız) optimum seçimleri tek değişken ve çok değişken durumunda incelenecektir.

Optimizasyon eldeki mevcut kaynakları en iyi şekilde kullanmak ve amaçlanan sonuca ulaşmak biçiminde tanımlanabilir.

Bu üniteye çalışmaya başlamadan önce mikro iktisat teorisi ve makro iktisat teorisinde denge kavramlarını yeniden gözden geçiriniz.

DİKKAT

TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA KISITSIZ OPTİMİZASYON

Tek değişkenli bir fonksiyonun genel gösterimi; x bağımsız değişkeni (seçim değişkeni ya da karar değişkeni) ve y bağımlı değişkeni (sonuç değişkeni) göstermek

Kritik nokta, bir fonksiyonun birinci türevini sıfır yapan değer olarak tanımlanır.

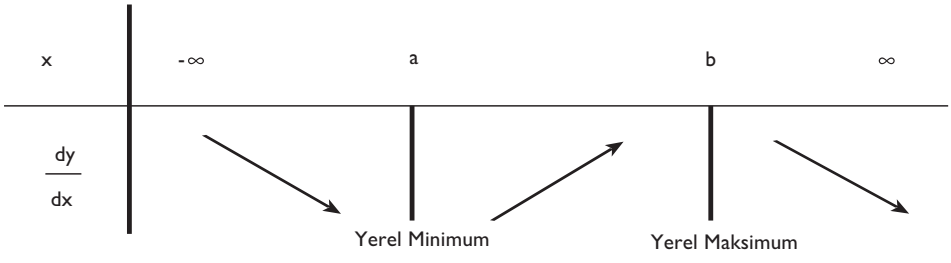
üzere $y = f(x)$ şeklinde gösterilir *($y = f(x)$ fonksiyonunun sürekli ve iki kere türevlenebilir olduğu varsayılacaktır.)*. Bu şekilde ifade edilen doğrusal olmayan fonksiyonun maksimumu ya da minimumu olup olmadığına karar verebilmek için gerekli koşul birinci türevini sıfır yapan kritik nokta ya da noktaların belirlenmesidir. Bu gerekli koşul sağlanınca ikinci türev alınarak maksimum ve minimum için yeterli koşul sağlanmış olur. Alternatif olarak birinci türevinin artan ve azalan olduğu aralıkların incelenmesi yoluyla da belirlenebilir. Bu ünitede maksimum ve minimum dışındaki kritik noktalar optimizasyonu ilgilendirmediği için incelenmeyecektir.

Yerel Maksimum ve Minimum İçin Birinci Türev Yöntemi

Bu yöntemde ilk önce $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevini $\left(\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0\right)$ sıfır yapan kritik nokta ya da noktalar bulunur. Daha sonra birinci türevi sıfır yapan nokta ya da noktalar *(a, b)* sıralı ikilileri ise bu noktaların artan ve azalan olduğu aralıklar incelenir. Şekil 7.1'e göre $y = f(x)$ fonksiyonunun *a* noktasında yerel minimumu, *b* noktasında ise yerel maksimumu vardır.

Şekil 7.1

Yerel Maksimum ve Minimum için Birinci Türev Yöntemi



Yerel Maksimum ve Minimum İçin İkinci Türev Yöntemi

1. $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevini $\left(\frac{dy}{dx} = 0\right)$ sıfır yapan kritik nokta ya da noktalar bulunur.
2. Birinci türevi sıfır yapan nokta ya da noktalar (a, b) sıralı ikili ise $y = f(x)$ fonksiyonun ikinci türevinde bu sıralı ikililer yerine konur. Eğer;
   i. İkinci türev negatif $\left(\frac{d^2y}{dx^2}(x_1 = a) \langle 0\right)$ ise, a değeri $y = f(x)$ fonksiyonunu maksimum yapan değerdir.
   ii. İkinci türev pozitif $\left(\frac{d^2y}{dx^2}(x_2 = b) \rangle 0\right)$ ise b değeri $y = f(x)$ fonksiyonunu minimum yapan değerdir.

Tek değişkenli fonksiyonlarda optimal değerleri bulmayı tanıttıktan sonra şimdi bunların iktisadi uygulamaları tanıtılacaktır. Hem mikro hem makro ekonomide tüketim, tasarruf, fayda, millî gelir, toplam hasıla, toplam maliyet, talep, arz, para talebi, para arzı gibi çok sayıda iktisadi fonksiyon kullanılmaktadır. İktisadi fonksiyonların hemen hemen hepsinde ekonomik birimlerin amacı doğrultusunda istenilen sonuca ulaşmak için optimizasyon kavramı kullanılabilir. Bu ünitede basitlik sağlamak amacıyla bunlardan sadece kâr fonksiyonu konu anlatımı çerçe-

vesinde ele alınacaktır. Bir firmanın kâr fonksiyonunun optimal değerleri belirlenmeden önce firmanın amacının belirlenmesi gereklidir. İktisadi açıdan her firmanın amacı kârını maksimum kılmaktır. Buna göre tek bir ürün üreten firmanın kâr fonksiyonu;

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$$

şeklinde ifade edilebilir. Yukarıdaki denklemde sırasıyla *(TR)* toplam hasılayı, *(TC)* toplam maliyeti, *(Q)* ise üretim miktarını temsil etmektedir. Firmanın kârını maksimum yapan üretim düzeyini bulabilmek için öncelikle kâr fonksiyonunun birinci türevini sıfır yapan üretim miktarını bulmamız gereklidir. Kâr fonksiyonunun birinci türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{d\pi(Q)}{dQ} = \frac{dTR(Q)}{dQ} - \frac{dTC(Q)}{dQ} = 0$$

$$\frac{d\pi(Q)}{dQ} = MR(Q) - MC(Q) = 0$$

$$MR(Q) = MC(Q)$$

sonucu bulunur. Buna göre firmanın marjinal hasılasını *MR(Q)* marjinal maliyetine *MC(Q)* eşitleyen üretim miktarı kâr fonksiyonun birinci türevini sıfır yapar *(Tüm piyasa koşullarında kâr maksimizasyonu koşulu MR(Q) = MC(Q)'dir. Ancak, Tam rekabet piyasasının varsayımlarının sonucunda firmaların fiyatı veri kabul etmeleri, firmanın marjinal hasılasının fiyata eşit olmasını garanti eder. Yani, MR(Q) = P'dir. Bu nedenle sadece tam rekabet piyasasında kâr maksimizasyon koşulu; P = MC(Q) şeklindedir.)*. Burada şunu anlıyoruz ki iktisadi bir kural olarak algıladığımız *MR(Q) = MC(Q)* eşitliği, aslında bir matematik gereğidir. İktisadi mantık taşıyan bu kural, matematiksel düşünme mantığına dayandırılarak elde edilen iktisadi bulgulardan bir tanesidir.

Firmanın üretim miktarını sıfır yapan üretim değer ya da değerlerinin maksimum olup olmadığına karar verebilmek için ikinci türevi alınır ve birinci türevi sıfır yapan üretim değerleri ikinci türevde yerine konur.

$$\frac{d^2\pi(Q^*)}{dQ^2} = \frac{d^2TR(Q^*)}{dQ^2} - \frac{d^2TC(Q^*)}{dQ^2} = 0$$

Eğer yukarıdaki kâr fonksiyonunun ikinci türev değeri negatif bir sonuç veriyor ise birinci türev kuralı ile elde edilen kritik nokta ya da noktaların firmanın kârını maksimum yaptığı söylenir. Bu koşulu bir örnekle açıklayalım.

Kâr, veri bir teknolji düzeyinde üretim yapan bir firmanın toplam hasılası ile toplam maliyeti arasındaki pozitif fark olarak tanımlanır.

SIRA SİZDE 1

Senyoraj fonksiyonu $S(e) = e \times \left(\frac{M}{P}\right)^d$ olduğuna göre, devletin senyoraj gelirini maksimum yapan enflasyon oranını nasıl hesaplayabiliriz?

ÖRNEK 1

Bir firmanın toplam hasıla fonksiyonu TR(Q) = 12Q - 2Q² ve toplam maliyet fonksiyonu $TC(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - 5Q^2 + 17Q + 25$ *olduğuna göre firmanın kârını maksimum yapan üretim düzeyini bulunuz.*

Çözüm 1: Firmanın kâr fonksiyonu;

$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$

$$\pi(Q) = 12Q - 2Q^2 - \left(\frac{1}{3}Q^3 - 5Q^2 + 17Q + 25\right)$$

şeklindedir. İlk olarak firmanın kârını maksimum yapan değerleri bulabilmek için kâr fonksiyonun birinci türevini sıfır yapan noktaları belirleyelim. Buna göre;

$$\frac{d\pi(Q)}{dQ} = 12 - 4Q - Q^2 + 10Q - 17 = 0$$

$$\frac{d\pi(Q)}{dQ} = -Q^2 + 6Q - 5 = 0$$

sonucu elde edilir. Yukarıdaki denklemin kökleri bulunurak birinci türevi sıfır yapan üretim değeri ya da değerleri elde edilir.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 6^2 - 4(-1)(-5)$$

$$\Delta = 36 - 20 = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$Q_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$Q_{1,2} = \frac{-6 \mp 4}{2(-1)} = 5,1$$

$Q_1 = 5$ ve $Q_2 = 1$ üretim değerlerinin hangisinin firmanın kârını maksimum yapıp yapmadığına karar verebilmek için ikinci türev koşullarına bakılır.

$$\frac{d^2\pi(Q)}{dQ^2} = -2Q + 6$$

$$\frac{d^2\pi(Q)}{dQ^2}(Q_1 = 5) = -2(5) + 6 = -4 \langle 0$$

$$\frac{d^2\pi(Q)}{dQ^2}(Q_2 = 1) = -2(1) + 6 = 4 \rangle 0$$

Yukarıda görüldüğü gibi iki farklı üretim düzeyinden bir tanesi $Q_1 = 5$ kâr fonksiyonunun ikinci türevinde değerlendirildiğinde negatif; bir diğer üretim değeri $Q_2 = 1$ ise ikinci türevde pozitif bir sonuç vermektedir. Daha önce belirttiğimiz gibi, bu iki kritik değerden kârı maksimum kılan ikinci türevi negatif yapan değerdir. Bu durumda kârını maksimum yapmak isteyen bir firmanın 5 birimlik üretim yapması gereklidir sonucu çıkarılabilir.

SIRA SİZDE 2

***R(t) = tQ* vergi geliri fonksiyonu ve satış miktarı *Q = a - bt* şeklinde verilmişse devletin vergi gelirlerini maksimum yapan vergi oranı ne olmalıdır?**

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA KISITSIZ OPTİMİZASYON

İktisadi problemlerde, fonksiyonlar genellikle çok değişkenlidir ve ekonomik birimlerin hedefleri çok sayıda değişkene bağlıdır. Örneğin, bir bireyin faydası, tüketmiş olduğu her malın miktarına bağlıdır. Bir firmanın üretim fonksiyonu, üretim sürecinde kullanmış olduğu emek, sermaye ve hammadde miktarı gibi birçok faktöre bağlıdır. Buna göre, n sayıda bağımsız değişkenden oluşan z fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n)$$

Tek bir ürün üreten firmanın amaç fonksiyonuna bağlı olarak kâr fonksiyonunun optimal değerlerini elde etmiştik. Bu bölümde iki ve üç değişkenli fonksiyonlarda optimal (yerel maksimum ve yerel minimum) noktaların nasıl bulunacağı verildikten sonra, iki ve üç ürün üreten firmanın amaç fonksiyonuna bağlı olarak kâr fonksiyonunun optimal değerleri ele alınacaktır.

İki Değişkenli Fonksiyonlarda Kısıtsız Optimizasyon

İki değişkenli bir fonksiyon (x_1, x_2) bağımsız değişkenleri ve z bağımlı değişkeni göstermek üzere $z = f(x_1, x_2)$ şeklindeki fonksiyonlarda yerel maksimum ya da yerel minimum değerlerin bulunması için aşağıdaki adımlar izlenir.

1. $z = f(x_1, x_2)$ fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevler eş anlı olarak sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = z_1 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = z_2 = 0$$

Bu sıfıra eşitleme sonucu birinci mertebeden kısmi türevini sıfır yapan sıralı ikililer bulunur.

2. Bu sıralı ikililer (a, b) ise, $z = f(x_1, x_2)$ ikinci mertebeden kısmi türevleri alınır ve bu sıralı ikililer kısmi türevlerde yerine konur;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}(a,b) = z_{11}(a,b)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}(a,b) = z_{22}(a,b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)(a,b) = z_{12}(a,b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)(a,b) = z_{21}(a,b)$$

(a, b) sıralı ikilisinin yerel maksimum ya da minimum olup olmadığına karar verebilmek için gerekli koşul Hessian matrisinin determinant değerinin sıfırdan büyük olması gerekliliğidir. Daha sonra asal minörlerinin işaretine bakılır. Buna göre;

$$|H| = \begin{vmatrix} z_{11}(a,b) & z_{12}(a,b) \\ z_{21}(a,b) & z_{22}(a,b) \end{vmatrix}$$

$$|H| = \left[\left(z_{11}(a,b)\right)\left(z_{22}(a,b)\right) - \left(z_{12}(a,b)\right)^2\right] \rangle 0$$

(Young Teoremi; $z = f(x_1, x_2)$ fonksiyonu sürekli türevlenebiliyorsa ikinci merteben çapraz kısmi türevlerinin birbirine eşit olduğunu öne sürer. Bu önermeye bağlı olarak $(z_{12}(a, b)) = (z_{21}(a, b))$ olur.)

olmak üzere;

i. Eğer $z_{11}(a, b)>0$ veya $z_{22}(a,b)>0$ asal minörleri ise *(a, b)* sıralı ikilisinin yerel minimum olduğu söylenir.

ii. Eğer $z_{11}(a, b)<0$ veya $z_{22}(a,b)<0$ asal minörleri ise *(a, b)* sıralı ikilisinin yerel maksimum olduğu söylenir.

iii. Hessian matirisinin determinant değeri $|H|<0$ ise ne maksimum ne de minimumu vardır. $|H| = 0$ ise bu sıralı ikililer için bir şey söylenemez.

Hessian matrisi ikinci mertebeden kısmi türevlerden elde edilen matristir.

İki değişkenli fonksiyonlarda kısıtsız optimizasyonu iki mal üreten bir firmanın kâr fonksiyonunu gözönüne alıp yeniden inceleyelim. Buna göre iki mal üreten bir firmanın kâr fonksiyonu

$$\pi(Q_1, Q_2) = TR(Q_1) + TR(Q_2) - TC(Q_1, Q_2)$$

şeklinde ifade edilir. Buna göre optimal üretim miktarlarını elde edebilmek için kâr fonksiyonun birinci mertebeden kısmi türevleri sıfıra eşitlenir:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = \pi_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = \pi_2 = 0$$

elde edilir. Daha sonra Hessian matrisi oluşturulur ve asal minörlere bakılır

$$|H| = \begin{vmatrix} \pi_{11}(Q_1,Q_2) & \pi_{12}(Q_1,Q_2) \\ \pi_{21}(Q_1,Q_2) & \pi_{22}(Q_1,Q_2) \end{vmatrix}$$

$$|H| = \left[\left(\pi_{11}(Q_1,Q_2)\right)\left(\pi_{22}(Q_1,Q_2)\right) - \left(\pi_{12}(Q_1,Q_2)\right)^2\right] \rangle 0$$

$$\text{iken asal minör } \pi_{11}(Q_1,Q_2) \langle 0$$

ise firmanın ürettiği (Q_1, Q_2) malların firmanın kârını maksimum yaptığı söylenir.

ÖRNEK 2

Bir firmanın kâr fonksiyonu $\pi(Q_1, Q_2) = 64Q_1 - 2Q_1^2 + 4Q_1Q_2 - 4Q_2^2 + 32Q_2 - 14$ olduğuna göre firmanın kârını maksimum yapan üretim düzeyini bulunuz.

Çözüm 2: Kâr fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevi alınır ve çözümlenirse

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = \pi_1 = 64 - 4Q_1 + 4Q_2 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = \pi_2 = 4Q_1 - 8Q_2 + 32 = 0$$

$$\pi_1 = 64 = 4Q_1 - 4Q_2$$

$$\underline{\pi_2 = 32 = -4Q_1 + 8Q_2}$$

$$96 = 4Q_2$$

$$Q_2 = \frac{96}{4} = 24$$

$$64 = 4Q_1 - 4Q_2$$

$$64 = 4Q_1 - 4(24)$$

$$160 = 4Q_1$$

$$Q_1 = \frac{160}{4} = 40$$

sonucu elde edilir. (Q_1, Q_2) = (40, 24) üretim miktarlarının kârı maksimum yapan miktarlar olup olmadığına karar verebilmek için ikinci mertebeden kısmi türevler alınırsa

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2}(Q_1, Q_2) = \pi_{11}(Q_1, Q_2) = \pi_{11}(40, 24) = -4$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2}(Q_1, Q_2) = \pi_{22}(Q_1, Q_2) = \pi_{22}(40, 24) = -8$$

$$\frac{\partial}{\partial Q_2}\left(\frac{\partial \pi}{\partial Q_1}\right) = \pi_{12}(Q_1, Q_2) = \pi_{12}(40, 24) = 4$$

$$\frac{\partial}{\partial Q_1}\left(\frac{\partial \pi}{\partial Q_2}\right) = \pi_{21}(Q_1, Q_2) = \pi_{21}(40, 24) = 4$$

sonuçları elde edilir. Bu sonuçları kullanarak Hessian matrisi oluşturulursa

$$|H| = \begin{vmatrix} \pi_{11}(Q_1, Q_2) & \pi_{12}(Q_1, Q_2) \\ \pi_{21}(Q_1, Q_2) & \pi_{22}(Q_1, Q_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi_{11}(40, 24) & \pi_{12}(40, 24) \\ \pi_{21}(40, 24) & \pi_{22}(40, 24) \end{vmatrix}$$

$$|H| = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}$$

kurgusunu elde ederiz. Son olarak, Hessian determinantını ve ikinci mertebeden kısmi türevi (40, 24) noktasında değerlendirir isek:

$$|H| = \left[(-4)(-8) - (4)^2\right] = 32 - 16 = 16 \rangle 0$$

$$\pi_{11}(40, 24) = -4 \langle 0$$

sonuçları bulunur ve firmanın sırasıyla $(Q_1, Q_2) = (40, 24)$ birim üretmesi durumunda kârını maksimum yaptığı söylenir.

SIRA SİZDE 3

K ve L sırasıyla sermaye ve emeği temsil etmek üzere toplam maliyet fonksiyonu $TC(Q(K, L) = 160K - 3K^2 - 2KL - 2L^2 + 120L - 45$ ise firmanın maliyetini optimum yapan üretim düzeyini nasıl hesaplayabiliriz?

Üç Değişkenli Fonksiyonlarda Kısıtsız Optimizasyon

Üç değişkenli bir fonksiyon (x_1, x_2, x_3) bağımsız değişkenleri ve z bağımlı değişkeni göstermek üzere $z = f(x_1, x_2, x_3)$ şeklindedir. Bu tip fonksiyonlarda yerel maksimum ya da yerel minimum değerlerin bulunması için aşağıdaki adımlar izlenir.

1. Birinci mertebeden kısmi türevler alınır ve eşanlı olarak sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = z_1 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = z_2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = z_3 = 0$$

Bu sıfıra eşitleme sonucu birinci mertebeden kısmi türevini sıfır yapan değerler bulunur. Bu değerler (a, b, c) ise ikinci mertebeden kısmi türevlerine bakılır.

2. $z = f(x_1, x_2, x_3)$ fonksiyonun ikinci mertebeden kısmi türevleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = z_{11} \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) = z_{12} \qquad \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) = z_{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = z_{21} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = z_{22} \qquad \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = z_{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_3}\right) = z_{31} \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_3}\right) = z_{32} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} = z_{33}$$

(a, b, c) değerlerinin yerel maksimum ya da minimum olup olmadığına karar verebilmek için Hessian matrisi oluşturulur ve asal minörlerinin işaretine bakılır.

$$|H| = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{vmatrix}$$

Eğer;

i. Asal minörler

$$|H_1| = z_{11} \langle 0, \; |H_2| = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} \rangle 0 \; ve \; |H_3| = |H| = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{vmatrix} \langle 0$$

ise Hessian matrisi negatif belirlidir. Bu durumda (a, b, c) değerlerinin amaç fonksiyonunu maksimum kılan değerler olduğu söylenir.

Pozitif ve negatif belirlilik, n. mertebeden simetrik bir matrisin bütün asal minörleri sıfırdan büyükse matris pozitif belirlidir. Eğer asal minörleri (-, +, -, +, ...) şeklinde ise matris negatif belirlidir.

ii. Asal minörler

$$|H_1| = z_{11} \rangle 0, |H_2| = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} \rangle 0 \ ve \ |H_3| = |H| = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{vmatrix} \rangle 0$$

ise Hessian matrisi pozitif belirlidir. Bu durumda *(a, b, c)* değerlerinin amaç fonksiyonunu minimum kılan değerler olduğu söylenir.

Üç mal üreten bir firmanın amacına bağlı olarak kâr fonksiyonu düzenlenir ve iki değişkenli kâr fonksiyonuyla benzer şekilde

$$\pi(Q_1, Q_2, Q_3) = TR(Q_1) + TR(Q_2) + TR(Q_3) - TC(Q_1, Q_2, Q_3)$$

biçiminde ifade edilir. Kâr fonksiyonunu maksimum kılan üretim miktarlarını tespit edebilmek için birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlere bakılır. Buna göre kâr fonksiyonun birinci mertebeden kısmi türevleri sıfıra eşitlenir:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = \pi_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = \pi_2 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_3} = \pi_3 = 0$$

Yukarıdaki üç denklem eşanlı çözülerek, (Q_1, Q_2, Q_3) üretim miktarları belirlenir. Daha sonra Hessian matrisi oluşturulur ve asal minörlere bakılır:

$$|H| = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{vmatrix}$$

Eğer asal minörler

$$|H_1| = \pi_{11} \langle 0, |H_2| = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{vmatrix} \rangle 0 \ ve \ |H_3| = |H| = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{vmatrix} \langle 0$$

ise firmanın ürettiği malların firmanın kârını maksimum kılan üretim miktarları olduğu söylenir.

ÖRNEK 3

Bir firmanın kâr fonksiyonu $\pi(Q_1, Q_2, Q_3) = 5Q_1^2 - 2Q_2^2 + 4Q_3^2 + 10Q_1 + 4Q_2 + Q_1Q_3 + 2Q_2Q_3 + 50$ *şeklinde verilmiştir. Kârı maksimum kılan üretim düzeylerini bulunuz. İkinci türev koşullarını test ediniz.*

Çözüm 3: İlk olarak kâr fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevleri sıfıra eşitlenir ve denklem sistemi çözümlenir.

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = \pi_1 = -10Q_1 + 10 + Q_3 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = \pi_2 = -4Q_2 + 2Q_3 + 4 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_3} = \pi_3 = Q_1 + 2Q_2 - 8Q_3 = 0$$

Yukarıdaki denklem sistemini çözümleyebilmek için A katsayılar matrisi, Q bilinmeyenler vektörü ve B sabitler vektörünü temsil etmek üzere;

DİKKAT

Bu soruyu çözmeye başlamadan önce *AX = B* şeklinde verilen denklem sistemlerinin çözüm yöntemleri için ünite 5'i yeniden gözden geçiriniz.

$$AQ = B$$

$$\begin{vmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 \\ -4 \\ 0 \end{vmatrix}$$

şeklinde yeniden düzenlenir ve Cramer kuralı kullanılırsa birinci mertebeden kısmi türevini sıfır yapan değerler aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$Q_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix}}$$

$$Q_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-288}{-276} \cong 1{,}04$$

$$Q_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -10 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix}}$$

$$Q_2 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-336}{-276} \cong 1{,}22$$

$$Q_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & 0 & -10 \\ 0 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix}}$$

$$Q_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-120}{-276} \cong 0,43$$

sonucu elde edilir. Buna göre üretim değerleri sırasıyla (Q_1, Q_2, Q_3) = (1,04; 1,22; 0,43) dür. Bu değerlerin maksimum olup olmadığı test etmek için Hessian matrisi oluşturulur ve asal minörlerinin işaretine bakılır.

Sarrus kuralı, "3x3" boyutundaki matrislerin determinantını hesaplamak için kullanılan bir yöntemdir.

$$|H| = \begin{vmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix}$$

$$|H_1| = -10 \langle 0 \qquad |H_2| = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = \left[(-10 \times -4) - (0 \times 0)\right] = 40 \rangle 0$$

$$|H_3| = |H| = -276 \langle 0$$

olduğundan Hessian matrisi negatif tanımlıdır ve bulunan değerler firmanın kârını maksimum yapan üretim düzeyleridir.

Bireyin fayda fonksiyonu $U(X_1, X_2, X_3)=160X_1-2X_1^2+120X_2-4X_2^2+130X_3-5X_3^2+30$ ise optimum tüketim miktarlarını nasıl hesaplayabiliriz?

SIRA SİZDE 4

Özet

AMAÇ 1

İktisadi fonksiyonlarda optimizasyon kavramını tanımlamak

Optimizasyon mevcut koşullar altında alternatifler arasından en iyi olan seçeneğin tercih edilmesi şeklinde tanımlanabilir. Bu anlamda ekonomi teorisinde tüm ekonomik birimlerin mecut alternatifler arasında rasyonel davrandığı varsayılır. Bu varsayım kullanılarak ulaşılmak istenen sonuç matematiksel olarak, doğrusal olmayan herhangi bir fonksiyonun kritik noktalarını bulunması ve bu kritik noktaların maksimum ya da minimumu sağlayıp sağlamadığını test etmek biçiminde özetlenebilir.

AMAÇ 2

Tek Değişkenli Fonksiyonların maksimum ve minimum noktalarını bulmak

Tek değişkenli bir fonksiyonun maksimumu ya da minimumunun olup olmadığına karar verebilmek için gerekli koşul birinci türevini sıfır yapan kritik nokta ya da noktaların belirlenmesidir. Bu gerekli koşul sağlanınca, ikinci türev alınarak maksimum ve minimum için yeterli koşul sağlanmış olur. Alternatif olarak birinci türevinin artan ve azalan olduğu aralıkların incelenmesi yoluyla da belirlenebilir.

AMAÇ 3

İki Değişkenli Fonksiyonların maksimum ve minimum nokatalarını bulmak

İki değişkenli bir fonksiyonun maksimumu ya da minimumunun olup olmadığına karar verebilmek için birinci mertebeden kısmi türevini sıfır yapan sıralı ikililer bulunur. Bu sıralı ikililer *(a, b)* ise ikinci mertebeden kısmi türevlerine bakılır ve birinci mertebeden kısmı türevlerini sıfır yapan sıralı ikililer yerine konur. *(a, b)* sıralı ikilisinin yerel maksimum ya da minimum olup olmadığına karar verebilmek için Hessian matrisinin determinant değerinin sıfırdan büyük olması gerekir. Daha sonra asal minörlerinin işaretine bakılır.

AMAÇ 4

Üç Değişkenli Fonksiyonların maksimum ve minimum nokatalarını bulmak

Üç değişkenli bir fonksiyonun maksimumu ya da minimumunun olup olmadığına karar verebilmek için birinci mertebeden kısmi türevini sıfır yapan noktalar bulunur. Bu noktalar *(a, b, c)* ise ikinci mertebeden kısmi türevlerine bakılır ve yerel maksimum ya da minimum olup olmadığına karar verebilmek için Hessian matrisinin negatif belirli ya da pozitif belirli olmasına bakılır.

MATEMATİKSEL İKTİSAT

8

Amaçlarımız

Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- İktisadi fonksiyonlarda kısıtlı optimizasyon kavramını açıklayabilecek,
- İki değişkenli fonksiyonlarda kısıtlı optimizasyon problemlerini çözebilecek,
- Kısıtlı optimizasyon problemlerinde amaç fonksiyonunun minumum mu yoksa maksimum mu olduğunu test edebilecek,
- Tüketicinin kısıt altında fayda maksimizasyonu ve harcama minimizasyonu sağlayan optimal tüketim bileşimini bulabilecek,
- Firmanın kısıt altında üretim maksimizasyon ve maliyet minimizasyon problemlerini çözebilecek

bilgi ve becerilere sahip olacaksınız.

Anahtar Kavramlar

- Kısıtlı optimizasyon
- Birinci dereceden koşullar
- İkinci dereceden koşullar
- Lagrange fonksiyonu
- Lagrange çarpanı
- Sınırlandırılmış Hessian matrisi
- Fayda maksimizasyonu
- Maliyet minimizasyonu

İçindekiler

Matematiksel İktisat → Kısıtlı Optimizasyon

- GİRİŞ
- KISITLI OPTİMİZASYON
- ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA KISITLI OPTİMİZASYON
- ÇOK DEĞİŞKENLİ ÇOK KISITLI FONKSİYONLARDA OPTİMİZASYON
- İKİNCİ DERECEN KOŞULLAR
- KISITLI OPTİMİZASYON İLE İKTİSADİ UYGULAMALAR

Kısıtlı Optimizasyon

GİRİŞ

Sonsuz olan insan ihtiyaçları karşısında kaynakların kıt olması çoğu zaman bir seçim yapmayı gerektirir. Bu seçim problemi ile bireyler, firmalar, kurumlar, hükümetler kısaca tüm ekonomik birimler karşı karşıya kalır. Yapılacak seçim bazen koşulsuz olacaktır. Koşulların olmadığı durumda yapılan seçime **"kısıtsız optimizasyon"** diyoruz. Eğer bir firma maliyetlerini göz önünde bulundurmadan başka firmaların piyasa girmesini engellemek için, hasılatını maksimize etmeyi amaçlıyorsa, bu bir kısıtsız optimizasyondur. Kısıtsız optimizasyonun nasıl yapılacağını bir önceki ünitede inceledik.

Fakat iktisatta seçim çoğu zaman kısıtlar altında yapılmak zorundadır. Tüketici bütçesini ve ürün fiyatlarını göz önünde bulundurup faydasını maksimize etmeyi amaçlayacak, firma maliyetlerini göz önünde bulundurup üretimini maksime etmeye çalışacak, hükümetler enflasyonu yükseltmeden istihdamı artırmayı amaçlayacaktır. Tüm bu örnekler bir amacın çeşitli kısıtlar altında gerçekleştirilmesini gerektiren bir sürece işaret etmektedir. İşte bir amacın belirli kısıtlar altında gerçekleştirilmesine **"kısıtlı optimizasyon"** diyoruz. Burada optimizasyon bazen bir maksimizasyon problemi olarak karşımıza çıkarken bazen de bir minimizasyon problemi olarak karşımıza çıkabilir. Tüketici sınırlı bütçesi ile kendisine en fazla faydayı sağlayacak tüketim bileşimini seçerken bir kısıt altında maksimizasyon problemi ile karşı karşıya iken, belirli bir üretim miktarını en düşük maliyetle gerçekleştirmek isteyen firmanın karşı karşıya kaldığı problem ise bir minimizasyon problemidir. Amaç ister maksimizasyon, isterse minimizasyon olsun her iki durum da belirli kısıtlar altında çözülen bir kısıtlı optimizasyon problemidir.

Bir amacın belirli kısıtlar altında gerçekleştirilmesine "kısıtlı optimizasyon" denir.

Kısıtlı optimizasyon matematiksel olarak ise bir fonksiyonu belirli kısıt ya da kısıtlar altında minimum ya da maksimum yapan değerleri bulmak şeklinde tanımlanabilir. Optimizasyon problemlerine kısıt konmasının temel amacı iktisadın kıt kaynak problemini esas almaktadır. Örneğin bireylerin çalışma-boş zaman tercih problemlerini çözerken bir günde 24 saat olduğu ve bu 24 saatin 8 saatini uyuyarak geçireceği kısıtını koymaz isek birey faydasını maksimize edecek çalışma-boş zaman bileşimi seçerken 16 saatten fazla çalışmayı tercih edebilecektir. Böyle bir sonuç ise gerçekle uyumsuz sonuçlarının ortaya çıkmasına neden olabilecektir.

KISITLI OPTİMİZASYON

Bir kısıtlı optimizasyon problemi üç farklı şekilde çözülebilir. Bunlar:

- Yerine koyma metodu,
- Toplam diferansiyel metodu ve
- Lagrange çarpanı metodudur.

Şimdi sırasıyla bu üç metodu açıklayalım.

Yerine Koyma Metodu İle Kısıtlı Optimizasyon

f (x, y) amaç fonksiyonunu *g (x, y) = k* kısıtı altında optimize etmenin birinci yolu kısıtı amaç fonksiyonu içerisine koymaktır. Bunun için öncelikle kısıt fonksiyonundaki *y*'yi, *x ve k'nın* bir fonksiyonu olarak yazmalıyız:

$$g(x, y) = k \qquad \textbf{(8.1)}$$

$$y = h(x, k) \qquad \textbf{(8.2)}$$

Şimdi *x* ve *k*'nın bir fonksiyonu olarak yeniden düzenlenmiş kısıtı amaç fonksiyonuna koyarsak amaç fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$f(x, h(x, k)) \qquad \textbf{(8.3)}$$

Aslında bu kısıtsız optimizasyondan başka bir şey değildir. Eğer yukarıdaki fonksiyonun x'e göre türevini alırsak I. dereceden koşullara ulaşabiliriz:

$$\frac{\partial f(x, h(x,k))}{\partial x} = f_x + f_h \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \qquad \textbf{(8.4)}$$

Kapalı fonksiyon kuralından faydalanırsak;

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{g_x}{g_y} \text{ olur.} \qquad \textbf{(8.5)}$$

Buradan I. dereceden koşullar:

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{g_x}{g_y} \qquad \textbf{(8.6)}$$

Kısıtlı optimizasyonda yerine koyma metodu, problemi kısıtsız optimizasyon problemine dönüştürür.

olacaktır. Eşitlik (8.6)'da verilen birinci dereceden koşulları sağlayan *x* ya da *y* ifadesi kısıt fonksiyonunda yerine konulmak suretiyle, amaç fonksiyonunu *g (x, y) = k* kısıtı altında optimize eden x^* ve y^* kritik değerleri bulunabilir.

DİKKAT

Bu ünitede incelenen kısıtlı optimizasyon problemlerinde kısıt fonksiyonu bir eşitlik durumundadır. Kısıtın eşitlik olmadığı durumlar bu kitabın amaç ve kapsamını aşmaktadır.

KİTAP

Kısıt fonksiyonun eşitsizlik olduğu durumlar için Chiang ve Wainwright (2005)'e bakılabilir.

ÖRNEK 1

f(x, y) = xy amaç fonksiyonunu g(x, y) = 4x+2y=40 kısıtı altında yerine koyma metodu ile optimize ediniz.

Çözüm 1: Önce kısıt fonksiyonunu *y* cinsinden yazalım:

Kısıt: $g(x, y) = 4x + 2y = 20$

$y = h(x, k) = 20 - 2x$

Şimdi bu kısıt fonksiyonun amaç fonksiyonunda yerine yazalım:

$$f(x,y) = f(x,h(x,k)) = x[20-2x]$$

Şimdi yukarıdaki kısıtı içeren amaç fonksiyonunu optimize edelim:

$$\frac{\partial f(x,h(x,k))}{\partial x} = 20-4x = 0$$

$x^* = 5$ bulunur.

Bu değeri $y = h(x, k) = 20 - 2x$ fonksiyonunda yerine koyarsak:

$y^* = 10$ olur.

x^* ve y^* değerleri veri iken, fonksiyonun değeri:

$f(x, y) = x^* y^* = 50$ bulunur.

Bulunan kritik değerlerin amaç fonksiyonunu minumum mu yoksa maksimum mu yaptığını II. dereceden koşullarını inceleyerek söyleyebiliriz:

$$\frac{\partial^2 f(x,h(x,k))}{\partial x^2} = -4 < 0 \text{ maksimum.}$$

Kısıtsız optimizasyonda II. Dereceden koşullar için bu kitabın 7. ünitesini inceleyiniz.

DİKKAT

Toplam Diferansiyel Yaklaşımı İle Kısıtlı Optimizasyon

Amaç fonksiyonunu bir kısıt altında optimize etmenin bir diğer yolu toplam diferansiyel metodudur. Bu yaklaşımda hem amaç fonksiyonunun hem de kısıtın toplam diferansiyeli alınıp eşanlı olarak çözülmesi gerekir.

Yine amaç fonksiyonumuz $f(x, y)$ ve kısıt fonksiyonumuz $g(x, y) = k$ olsun. Her iki fonksiyonun toplam diferansiyeli şöyle yazılabilir:

$$df = f_x dx + f_y dy \qquad \textbf{(8.7)}$$

$$dk = g_x dx + g_y dy = 0 \qquad \textbf{(8.8)}$$

"k" bir sabit olduğundan kısıt fonksiyonunun toplam türevi sıfıra eşittir.

DİKKAT

Yukarıdaki ikinci eşitlikten;

$$dy = -\frac{g_x}{g_y} dx \qquad \textbf{(8.9)}$$

yazılabilir.

Eşitlik (8.9)'daki ifadeyi eşitlik (8.7)'de yerine koyarsak;

$$df = \left[f_x - \frac{g_x}{g_y} f_y \right] dx \qquad \textbf{(8.10)}$$

olur. Birinci dereceden koşulların sağlanabilmesi için $df = 0$ olması gerekir. Bu koşulun sağlanabilmesi için ise:

f (x, y) amaç fonksiyonunun *g (x, y) = k* kısıtı altında optimizasyonu için gerekli birinci dereceden koşullar $\left(\frac{f_x}{f_y} = \frac{g_x}{g_y}\right)$ eşitliği ile sağlanmaktadır.

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{g_x}{g_y} \tag{8.11}$$

olması gerekir.

Bir önceki optimizasyon metodunda olduğu gibi birinci dereceden koşulları sağlayan x yada y ifadesi kısıt fonksiyonunda yerine konulmak suretiyle amaç fonksiyonunu $g(x, y) = k$ kısıtı optimize eden x^* ve y^* değerleri bulunabilir.

ÖRNEK 2

$f(x, y) = xy^2$ amaç fonksiyonunu $g(x, y) = 4x + 5y = 600$ kısıtı altında optimize ediniz.

Çözüm 2: Amaç ve kısıt fonksiyonunun I. dereceden koşulları eşitlik (8.11) verilmişti. Buna göre:

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{g_x}{g_y}$$

$f_x = y^2$ $\quad$ $f_y = 2xy$

$g_x = 4$ $\quad$ $g_y = 5$'tir.

Bunları yerlerine koyarsak:

$$\frac{y^2}{2xy} = \frac{4}{5} \text{ olur.}$$

Buradan $x = \frac{5}{8}y$ ya da $y = \frac{8}{5}x$ bulunur. Bu x ve y değerlerinden herhangi biri kısıt fonksiyonunda yerine konursa:

$g(x, y) = 4x + 5y = 600$

$$= 4x + 5\left[\frac{8}{5}x\right] = 600$$

$x^* = 50$ olur.

$y = \frac{8}{5}x$ olduğuna göre:

$y^* = 80$ bulunur.

Lagrange Çarpanı Metodu İle Kısıtlı Optimizasyon

f (x, y) amaç fonksiyonunu *g (x, y) = k* kısıtı altında optimize etmek için Lagrange Çarpanı (λ) metodundan da faydalanılabilir. Aslında bu metot iktisatta kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan en yaygın metodtur. Nedeni ise diğer iki metoda göre önemli bir üstünlüğünün olmasıdır. Bu metotla yapılan çözümlerin özelliği amaç fonksiyonunu bir ya da birden fazla kısıt altında optimize eden değişkenlerin değerleri ile birlikte, kısıttaki değişimin amaca etkisini gösteren Lagrange çarpanını da veriyor olmasıdır. Her ne kadar amacın kısıttaki değişime duyarlılığını diğer iki metotta da hesaplamak mümkün olsa da Lagrange çarpanı metodunda bunu doğrudan veriyor olması bir üstünlük olarak görülebilir.

Lagrange metodu ile optimizasyon için:

1. Öncelikle kısıt sıfıra eşitlenir: $k - g(x, y) = 0$
2. Sonra kısıt Lagrange çarpanı ile çarpılır ve Lagrange fonksiyonu oluşturulur:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \{k - g(x, y)\} \qquad \textbf{(8.12)}$$

Yukarıdaki eşitlikte $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ Lagrange fonksiyonunu, $f(x, y)$ amaç fonksiyonunu ve $g(x, y)$ kısıtı temsil etmektedir. Lagrange fonksiyonundaki kısıt sıfıra eşit olduğundan, $\lambda \{k - g(x, y)\}$ terimi de sıfıra eşittir. Dolayısıyla aslında Lagrange fonksiyonu amaç fonksiyonunun ta kendisidir.

3. Fonksiyonu optimize eden x, y ve λ değerlerini bulabilmek için ilk önce Lagrange fonksiyonunun birinci dereceden türevleri alınır ve sıfıra eşitlenir. Daha sonra elde edilen denklemler eşanlı çözümlenir ve değerler bulunur.

DİKKAT

Lagrange fonksiyonuna kısıtın $\lambda \{k - g(x, y)\}$ ya da $\lambda \{g(x, y) - k\}$ şeklinde yazılması sonucu değiştirmeyecektir. Bu sadece λ'nın işaretini değiştirecektir.

Yukardaki açıklanan 3 aşamalı optimizasyon süreci şöyledir:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \{k - g(x, y)\} \qquad \textbf{(8.13)}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = f_x - \lambda g_x = 0 \\ \mathcal{L}_y &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f_y - \lambda g_y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = k - g(x, y) = 0 \end{aligned}\right\} \textit{Birinci dereceden koşullar.} \qquad \textbf{(8.14)}$$

Yukardaki birinci dereceden koşullar eşanlı olarak çözülürse:

$$\lambda = \frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \qquad \textbf{(8.15)}$$

olur ve bu eşitlikten elde edilecek bir x ya da y değeri $\mathcal{L}_\lambda$ fonksiyonunda yerine konarak amaç fonksiyonunu verilen kısıt altında optimize eden x, y ve λ değerleri bulunabilir.

Şimdi konunun anlaşılması için bir örnekle inceleyelim.

ÖRNEK 3

$f(x, y) = 8x^2 + 6xy + 12y^2$ amaç fonksiyonunu $g(x, y) = x + y = 70$ kısıtı altında optimize ediniz.

Çözüm 3: Bu optimizasyon problemini çözmek için öncelikle kısıt fonksiyonunu sıfıra eşitleyip sonra Lagrange fonksiyonu oluşturmalıyız.

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 8x^2 + 6xy + 12y^2 + \lambda (70 - x - y)$$

şimdi her bir değişken için I. derecen kısmi türevleri alarak, birinci dereceden koşulları bulalım:

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}_x &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 16x + 6y - \lambda = 0\\ \mathcal{L}_y &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 6x + 24y - \lambda = 0\\ \mathcal{L}_\lambda &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 70 - x - y = 0\end{aligned}\right\} \quad \lambda = 16x + 6y = 6x + 24y$$

$$10x = 18y \Rightarrow x = \frac{9}{5}y \text{ yada } y = \frac{5}{9}x$$

Şimdi bulduğumuz x ya da y değerini $\mathcal{L}_\lambda$ fonksiyonunda yerine koyalım.

$$70 - x - \frac{5}{9}x = 0$$

bu eşitliği x için çözersek;

$x^* = 45$ bulunur.

Bulduğumuz bu x değerini $y = \frac{5}{9}x$ fonksiyonunda yerine koyarsak;

$y^* = 25$ olur.

Son olarak bu x ve y değerlerini kullanarak λ'yı hesaplayabiliriz:

$\lambda = 16x+6y = 6 * 45 + 24 * 25$
$\lambda^* = 870$ bulunur.

Sonuç olarak $f(x, y)$ amaç fonksiyonunu optimize eden ve toplamı 70 olan x, y ve λ değerleri:

$x^* = 45$; $y^* = 25$ ve $\lambda^* = 870$'tir.

Bu değerler amaç fonksiyonunu optimize eden değerlerdir. Dolayısıyla amaç fonksiyonunun maksimumda mı yoksa minimumda mı olduğu ile ilgili bir bilgiye henüz sahip değiliz. Bunun için fonksiyonun ikinci dereceden koşullarını incelemek gerekecektir.

Lagrange Çarpanı'nın Anlamı

Lagrange çarpanı (λ), amaç fonksiyonunun kısıt fonksiyonundaki değişime duyarlılığını ölçer.

$$Lagrange\,Çarpanı(\lambda) = \frac{d[amaç]}{d[kısıt]}$$

Kısıtlı optimizasyon problemindeki Lagrange çarpanı amacın kısıttaki değişime duyarlılığını ölçmektedir. Dolayısıyla Lagrange çarpanı amaç ile kısıt arasındaki marjinal ilişkinin şiddetini ölçer.

$$Lagrange\,Çarpanı(\lambda) = \frac{d[amaç]}{d[kısıt]}$$

Lagrange çarpanı iktisatçılar için son derece önemlidir. Zira karşı karşıya kalınan probleme göre Lagrange çarpanına farklı anlamlar yüklemek mümkün olacaktır. Örneğin tüketicinin bütçe kısıtı altındaki fayda maksimizasyon probleminde, λ harcamanın marjinal faydasına işaret ederken, bir firmanın belirli bir üretim kotası altındaki maliyet minimizasyon probleminde ise üretimin marjinal maliyetini gösterecektir.

Örnek 1'de kısıtın değeri 70'ten 71'e yükselirse amaç fonksiyonunun değeri ne kadar değişir?

SIRA SİZDE 1

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA KISITLI OPTİMİZASYON

Amaç ve/veya kısıt fonksiyonlarındaki değişken sayısının ikiden fazla olduğu durumlarda da Lagrange metodunu kullanarak kısıtlı optimizasyon problemlerini çözmek mümkündür. Varsayalım ki n değişkenli olan bir amaç fonksiyonumuz;

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \qquad \textbf{(8.16)}$$

ve yine n değişkenli bir kısıt fonksiyonumuz

$$g(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = k \qquad \textbf{(8.17)}$$

olsun.

Bu durumda Lagrange fonksiyonu ve optimizasyon için gerekli I. dereceden koşullar aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) + \lambda\{k - g(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)\} \qquad \textbf{(8.18)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{L}_{x_1} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = f_{x_1} - \lambda g_{x_1} = 0 \\
\mathcal{L}_{x_2} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = f_{x_2} - \lambda g_{x_2} = 0 \\
&\;\;\vdots \\
\mathcal{L}_{x_n} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = f_{x_n} - \lambda g_{x_n} = 0 \\
\mathcal{L}_{\lambda} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = k - g(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0
\end{aligned}\right\} \textit{Birinci dereceden koşullar.} \qquad \textbf{(8.19)}$$

Yukardaki birinci dereceden koşular eşanlı olarak çözülürse:

$$\lambda = \frac{f_{x_1}}{g_{x_1}} = \frac{f_{x_2}}{g_{x_2}} = \ldots\ldots = \frac{f_{x_n}}{g_{x_n}} \qquad \textbf{(8.20)}$$

Eşitlik (8.20)'den anlaşıldığı üzere, çok değişkenli fonksiyonların kısıtlı optimizasyon çözümü iki değişkenli fonksiyonlardan çok farklı değildir.

ÇOK DEĞİŞKENLİ ÇOK KISITLI FONKSİYONLARDA OPTİMİZASYON

Kısıtlı optimizasyon problemlerinde Lagrange çarpanı metodu bir amaç fonksiyonunun fakat birden fazla kısıtın olduğu durumlarda da kullanılabilir. Böyle bir durumda kısıt kadar Lagrange çarpanı olacaktır. Yine varsayalım ki n değişkenli bir amaç fonksiyonumuz;

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$

ve n değişkenli iki farklı kısıt fonksiyonumuz olsun.

$g\ (x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n) = k$

$z\ (x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n) = m$

Bu durumda Lagrange fonksiyonu ve birinci dereceden koşullar aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\mathcal{L}\ (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2) = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) + \lambda_1 \{k - g(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)\} + \lambda_2 \{m - z(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)\} \quad \textbf{(8.21)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{L}_{x_1} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = f_{x_1} - \lambda_1 g_{x_1} - \lambda_2 z_{x_1} = 0 \\
\mathcal{L}_{x_2} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = f_{x_2} - \lambda_1 g_{x_2} - \lambda_2 z_{x_2} = 0 \\
&\ \ . \\
&\ \ . \\
\mathcal{L}_{x_n} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = f_{x_n} - \lambda_1 g_{x_n} - \lambda_2 z_{x_n} = 0 \\
\mathcal{L}_{\lambda_1} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = k - g(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0 \\
\mathcal{L}_{\lambda_2} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = m - z(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0
\end{aligned}\right\} \textit{Birinci dereceden koşullar.} \quad \textbf{(8.22)}$$

Yukardaki denklem sistemi eşanlı olarak çözülürse söz konusu kısıtlar altında amaç fonksiyonunu optimize eden $x_1^*,\ x_2^*, \ldots\ldots,\ x_n^*,\ \lambda_1^*,\ \lambda_2^*$ değerlerine ulaşılabilir.

İKİNCİ DERECEDEN KOŞULLAR

Kısıtlı optimizasyon problemlerinde elde edilen sonuçlar her ne kadar amaç fonksiyonunu optimize eden değerleri verse de aslında bulunan noktanın fonksiyonun o kısıt altında bir maksimumda mı yoksa minimumda mı olduğu hakkında bilgi vermez. Bunun için oluşturulan Lagrange fonksiyonunun ikinci dereceden koşullarının incelenmesi gerekmektedir. Bunun için sınırlandırılmış Hessian matrisini oluşturup oluşturulan matrisin negatif mi yoksa pozitif mi belirli olduğunu araştırmak gerekmektedir.

$f\ (x,\ y)$ amaç fonksiyonunu $g\ (x,\ y) = k$ kısıtı altında optimize etmek için oluşturulan Lagrange fonksiyonunun

$$\mathcal{L}\ (x, y, \lambda) = f\ (x, y) + \lambda\ \{k - g\ (x, y)\} \quad \textbf{(8.23)}$$

sınırlandırılmış Hessian Matrisi aşağıdaki gibidir:

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ g_y & \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} \end{vmatrix} \ yada\ |\bar{H}| = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} & g_x \\ \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix} \quad \textbf{(8.24)}$$

Dikkat edilirse bu aslında normal ikinci dereceden türevlerden oluşan Hessian matrisin, kısıt fonksiyonunun birinci dereceden türevleri ile sınırlandırılmış hâlidir.

Kısıt altında optimize edilmiş amaç fonksiyonunun minimum mu yoksa maksimum mu olduğunu belirlemek için, sınırlandırılmış Hessian'ın asal minörlerine bakmak gerekir.

Sınırlandırılmış Hessian'ın bütün asal minörleri negatifse yani $\{|\bar{H}_2| < 0, |\bar{H}_3| < 0, \ldots, |\bar{H}_n| < 0\}$ ise amaç fonksiyonu minimumdadır.

Sınırlandırılmış Hessian'ın bütün asal minörleri negatifse, yani:

$|\bar{H}_2| < 0, |\bar{H}_3| < 0, \ldots, |\bar{H}_n| < 0$ ise, sınırlandırılmış Hessian pozitif belirlidir. Pozitif belirli Hessian Lagrange fonksiyonunun, dolayısıyla amaç fonksiyonunun, minimum da olduğunu gösterir.

Sınırlandırılmış Hessian'ın asal minörleri pozitiften başlayarak işaret değiştiriyorsa $\{|\bar{H}_2| > 0, |\bar{H}_3| < 0, |\bar{H}_4| > 0, \ldots, (-1)^n |\bar{H}| > 0\}$ amaç fonksiyonu maksimumdadır.

Eğer asal minörler pozitiften başlayarak işaret değiştiriyorsa yani

$|\bar{H}_2| > 0, |\bar{H}_3| < 0, |\bar{H}_4| > 0, \ldots, (-1)^n |\bar{H}| > 0$ ise sınırlandırılmış Hessian negatif belirli ve Lagrange fonksiyonu maksimumda demektir.

Eşitlik (8.24)'te verilen sınırlandırılmış Hessian matrisinde, sınırlandırılan asal minör 2X2 boyunda olduğundan, minimum ya da maksimum için ikinci asal minöre bakmak yeterli olacaktır. Diğer bir ifade ile amaç;

$|\bar{H}_2| = |\bar{H}| > 0$ ise maksimum

$|\bar{H}_2| = |\bar{H}| < 0$ ise minimum olur.

Çok değişkenli ve/veya çok kısıtlı optimizasyon problemlerinde ikinci dereceden koşulların incelenmesi bu kitabın amaç ve kapsamını aşmaktadır.

KISITLI OPTİMİZASYON İLE İKTİSADİ UYGULAMALAR

İktisadi hayatta kıt kaynaklar karşısında sonsuz ihtiyaçların varlığı hemen hemen birçok iktisadi sorunun bir kısıt altında çözümü, diğer bir deyişle, kısıtlı optimizasyonu gerektirir. Tüketicinin fayda maksimizasyon problemi, bireylerin çalışma-boş zaman tercihi, firmanın kapasite kısıtı altında kâr maksimizasyon problemi, girdi fiyatları sabit ve firmanın finansman olanakları sınırlı iken üretimin maksimize edilmesi ya da belirli bir üretim düzeyinin en düşük maliyetle gerçekleştirilmesi ve bunlara benzer birçok iktisadi mesele kısıtlı optimizasyon teknikleri kullanılarak çözülebilir. Biz burada bunlardan sadece en sık karşılaşılan optimizasyon problemlerini ele alıp okuyucuların kısıtlı optimizasyon tekniklerini tüm iktisadi problemlere uygulamalarını bekliyor olacağız. Şimdi bu örnekleri kısaca inceleyelim.

Tüketicinin Fayda Maksimizasyonu

Hemen hemen birçok iktisat teorisi kitabında karşınıza çıkacak ilk kısıtlı optimizasyon problemi tüketicinin fayda maksimizasyon problemidir. Tüketicinin tükettiği malların fiyatları veri ve bu mallara harcayacak finansman olanaklarının belirli bir sınırı var iken, tüketicinin problemi faydasını maksimize etmektir. Konuyu basitleştirebilmek için tüketicinin x ve y gibi iki mal tükettiğini ve bu malları P_x ve P_y fiyatlarından satın alabildiğini varsayalım. Tüketicinin faydası tükettiği malların miktarının bir fonksiyonu olduğuna göre tüketicinin fayda fonksiyonunu, yani amaç fonksiyonunu şöyle yazabiliriz.

$$U = U(x, y) \qquad \textbf{(8.25)}$$

Tüketicinin bütçesini M ile gösterirsek, tüketicinin bütçe fonksiyonunu, yani kısıt fonksiyonunu da, aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$M = P_x X + P_y Y \tag{8.26}$$

Bu durumda tüketicinin problemi aşağıdaki gibi olacaktır:

maksimize et: $U = U(x, y)$

kısıt: $M = P_x X + P_y Y$

Yukarıdaki problemi "yerine koyma" ya da "toplam diferansiyel" yada "Lagrange" metotlarından herhangi biri ile çözmek mümkün olsa da Lagrange metodunun daha önce bahsettiğimiz üstünlüğü nedeni ile tüketicinin optimizasyon problemini Lagrange metodu ile çözelim:

Bunun için önce Lagrange fonksiyonunu oluşturup I. dereceden koşulları bulalım:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda\left(M - P_x x - P_y y\right) \tag{8.27}$$

$$\mathcal{L}_x \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda P_x = 0 \tag{8.28}$$

$$\mathcal{L}_y \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \lambda P_y = 0 \tag{8.29}$$

$$\mathcal{L}_\lambda \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = M - P_x x - P_y y = 0 \tag{8.30}$$

Yukardaki eşitlik (8.28) ve (8.29)'dan:

$$\lambda = \frac{\partial U / \partial x}{P_x} = \frac{\partial U / \partial y}{P_y} \tag{8.31}$$

Bir malın tüketilen son biriminin tüketiciye sağladığı faydaya o malın marjinal faydası denir. Dolayısıyla x malının marjinal faydası $MU_x = \partial U / \partial_x$ ve y malının marjinal faydası $MU_y = \partial U / \partial_y$ 'dır.

Aslında $\left(\partial U / \partial x\right)$ *ve* $\left(\partial U / \partial y\right)$ x ve y mallarının marjinal faydalarından başka bir şey değildir. x ve y mallarını marjinal faydalarını $MU_x = \partial U / \partial_x$ ve $MU_y = \partial U / \partial_y$ ile gösterirsek

Eşitlik (8.31) şöyle yazılabilir:

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y} \tag{8.32}$$

Eşitlik (8.32)'den bulunacak x ya da y ifadesi $\mathcal{L}_\lambda$'da yerine konularak tüketicinin bütçe kısıtı altına faydasını maksimize eden x^* ve y^* malı talep miktarı (ya da fonksiyonlarını), yani tüketicinin optimal tüketim bileşimi bulmak mümkündür.

Yukarıda bulunan sonuca "tüketicinin fayda optimizasyonu" veya "tüketici dengesi" denir ve şu şekilde yorumlanır: İki mal tüketen bir tüketicinin mevcut bütçe kısıtı altında faydasını maksimize edebilmesi için malların marjinal faydalarının fiyatlarına oranı birbirine eşit olması gerekir. Bu tüketicinin mallara harcadığı son liraların marjinal faylarının birbirlerine eşit olması anlamına gelir.

Eşitlik (8.32)'de gösterilen tüketici dengesi şu şekilde de yazılabilir:

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{P_x}{P_y} \tag{8.33}$$

İki mal tüketen bir tüketicinin bu iki maldan sağladığı marjinal faydaların birbirine oranına marjinal ikame oranı *(MRS)* denir. Bu durumda yukarıdaki eşitlik;

$$\frac{MU_x}{MU_y} = MRS_{yx} = \frac{P_x}{P_y} \qquad \textbf{(8.34)}$$

şeklini alır. Eşitlik (8.34) mallar arasındaki MRS'nin fiyat oranına eşit olması demektir ki, tüketicilerin tercihlerini yansıtan farksızlık eğrinin eğimi ile tüketicinin bütçe kısıtını gösteren bütçe doğrusunun eğiminin birbirine işit olmasından başka bir şey değildir.

İki mal tüketen bir tüketicinin bu iki maldan sağladığı marjinal faydaların birbirine oranına Marjinal İkame Oranı *(MRS)* denir:

$$MRS_{yx} = \frac{MU_x}{MU_y}$$

Son olarak, Tüketicinin faydasını bütçe kısıtı altında maksimize ederek elde dilen talep fonksiyonalarına bayağı (Marshalgil) talep fonksiyonları denir. Bayağı talep fonksiyonları talep miktarını tüketicin geliri ve malların fiyatlarının bir fonksiyonu olarak ifade eder. x ve y malları bayağı talep fonksiyonları aşağıdaki gibi yazılabilir:

X malı bayağı talep fonksiyonu: $X^*_M = X(P_x, P_y, M)$

Y *malı bayağı talep fonksiyonu:* $Y^*_M = Y(P_x, P_y, M)$

ÖRNEK 4

Fayda fonksiyonu $U(x, y) = x^{0,5}\, y^{0,3}$ biçiminde olan bir tüketici, x malını 10₺, ve y malını 3₺'den satın almaktadır. Bu iki mal için harcayabileceği toplam 400₺'si olan bu tüketicinin faydasını maksimize eden optimal tüketim bileşimini bulunuz. Bulunan tüketim bileşiminin faydayı maksimum yapıp yapmadığını kontrol ediniz.

Çözüm 4: Bu problemi çözebilmek için öncelikle tüketicinin kısıt fonksiyonunu (bütçe kısıtını) oluşturmak gerekir. Yukarıda verilen bilgilere göre tüketicinin bütçe kısıtı şöyle yazılabilir:

$$M = P_x x + P_y y \quad \Rightarrow \quad 400 = 10x + 3y$$

Bu durumda tüketicinin problemi:

Maksimize et: $U(x, y) = x^{0,5}\, y^{0,3}$

kısıt: $400 = 10x + 3y$

Fayda optimizasyon probleminin çözümü için gerekli Lagrange fonksiyonu ve I. dereceden koşulları aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^{0,5} y^{0,3} + \lambda\left(400 - 10x - 3y\right)$$

$$\mathcal{L}_x \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0,5x^{-0,5} y^{0,3} - \lambda 10 = 0$$

$$\mathcal{L}_y \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0,3x^{0,5} y^{-0,7} - \lambda 3 = 0$$

$$\mathcal{L}_\lambda \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 400 - 10x - 3y = 0$$

$$\lambda = \frac{0,5x^{-0,5} y^{0,3}}{10} = \frac{0,3x^{0,5} y^{-0,7}}{3}$$

$x = \frac{1}{2} y$ *ya da* $y = 2x$ bulunur.

bulunan x yada y ifadesini $\mathcal{L}_\lambda$'da yerine koyarsak:

$400 - 10x - 3(2x) = 0$
$x^* = 25$
$y^* = 50$
$\lambda \cong 0.03$ bulunur.

Sonuç olarak bu tüketici, ürün fiyatları ve bütçesi veri iken, eğer x malından 25 ve y malından 50 birim tüketirse faydası maksimum olmaktadır. Bu tüketim bileşiminin tüketicinin faydasını maksimum yapıp yapmadığı sınırlandırılmış Hessian'a bakarak teyit edebiliriz.

$\mathcal{L}_{xx} = -0{,}25x^{-1,5}\, y^{0,3}$ $\qquad$ $\mathcal{L}_{xy} = -0{,}15x^{-0,5}\, y^{-0,7}$

$\mathcal{L}_{yy} = -0{,}21x^{0,5}\, y^{-1,7}$ $\qquad$ $\mathcal{L}_{yx} = -0{,}15x^{-0,5}\, y^{-0,7}$

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ g_y & \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} \end{vmatrix} \qquad |\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 3 \\ 10 & -0{,}25x^{-1,5}y^{0,3} & -0{,}15x^{-0,5}y^{-0,7} \\ 3 & -0{,}15x^{-0,5}y^{-0,7} & -0{,}21x^{0,5}y^{-1,7} \end{vmatrix}$$

$|\bar{H}_2| = [-10(-2{,}1x^{0,5}\, y^{-1,7} - 0{,}45x^{-0,5}\, y^{-0,7})] + [3(-1{,}5x^{-0,5}\, y^{-0,7}) + 0{,}75x^{-1,5}\, y^{0,3}]$

$|\bar{H}_2| = 21x^{0,5}\, y^{-1,7} + 0{,}45x^{-0,5}\, y^{-0,7} - 4{,}5x^{-0,5}\, y^{-0,7} + 2{,}25x^{-1,5}\, y^{0,3}$

$|\bar{H}_2| = 21x^{0,5}\, y^{-1,7} + 2{,}25x^{-1,5}\, y^{0,3} > 0$

$|\bar{H}_2| = |\bar{H}| > 0$ olduğu için sınırlandırılmış Hessian negatif belirlidir. Dolayısıyla fayda *(U)* maksimize edilmiştir.

SIRA SİZDE 2

Yurtta kalan üniversite II. Sınıf öğrencisi Zarife, kahvaltısını her gün yurtta yaparken, öğle ve akşam yemeklerini okul yemekhanesinde veya dışarıda lokantada yemektedir. Zarife'nin bir aylık öğle ve akşam yemekleri için ayırdığı bütçesi ₺180'dir. Bir öğün yemeğin okul yemekhanesindeki fiyatı P_Y= ₺3 iken lokantada yemenin maliyeti P_L= ₺6'dir. Her ayın 5 gününü ailesinin yanında geçiren Zarife'nin fayda fonksiyonu aşağıda verilmektedir. (Not: Bir ay 30 gün olarak hesaplanmıştır. Dolayısıyla, Zarife her gün iki öğün olmak üzere toplam 25 gün-50 öğün yemekhane veya lokantada yemek yemesi gerekmektedir):

FAYDA = U (Y, L) = $Y^{0,5}\, L^{0,25}$

Y: Okul yemekhanesinde yenilen yemek.
L : Lokantada yenilen yemek.

Zarife'nin ₺180'lik yemek bütçesi ile faydasını maksimize edebilmesi için, öğle ve akşam yemeklerinin kaçını okul yemekhanesinde, kaçını lokantada yemelidir?

Tüketicinin Harcama Minimizasyonu

Tüketici her zaman faydasını maksimize etmeyi amaçlamayabilir. Bazen de belirli bir fayda düzeyine minimum harcamayla ulaşmayı hedefleyebilir. Böyle bir durumda amaç fonksiyonu tüketicinin bütçe fonksiyonu iken, kısıt fonksiyonu fayda fonksiyonu olacaktır.

İki mal tüketen bir tüketicinin bütçe fonksiyonu $M = P_x x + P_y y$ ve fayda fonksiyonu $U = U(x, y)$ ise, tüketicinin problemi;

Minimize et: $M = P_x x + P_y y$

Kısıt: $\bar{U} = U(x, y)$

Faydanın *(U)* üzerindeki tire işareti tüketicinin faydasının sabit olduğunu göstermektedir.

DİKKAT

Harcama minimizasyonu durumunda Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = P_x x + P_y y + \lambda(\bar{U} - U(x, y)) \quad \textbf{(8.35)}$$

$$\mathcal{L}_x \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = P_x - \lambda \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \textbf{(8.36)}$$

$$\mathcal{L}_y \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = P_y - \lambda \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \textbf{(8.37)}$$

$$\mathcal{L}_\lambda \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \bar{U} - U(x, y) = 0 \quad \textbf{(8.38)}$$

$$\lambda = \frac{P_x}{\partial U / \partial x} = \frac{P_y}{\partial U / \partial y} \quad \textbf{(8.39)}$$

Eşitlik (3.39) aslında tüketicinin fayda maksimizasyon problemindeki denge koşulundan (eşitlik 8.32) başka bir şey değildir:

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y} \quad \textbf{(8.40)}$$

O zaman buradan şu sonuç çıkarılabilir. Tüketicinin belirli bir fayda düzeyine en düşük harcama ile erişebilmesi için tükettiği malların marjinal faydalarının fiyatlarına oranı birbirine eşit olmalıdır.

Eşitlik (3.40) yeniden düzenlenirse tüketicinin harcama minimizasyonu için gerekli koşul aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\frac{MU_x}{MU_y} = MRS_{yx} = \frac{P_x}{P_y} \quad \textbf{(8.41)}$$

Tüketici ister belirli bir bütçe ile faydasını maksimize etmek istesin, isterse belirli bir fayda düzeyine minimum harcama ile ulaşmayı hedeflesin, her iki durumda da malların marjinal faydalarının fiyatlarına oranının birbirlerine eşit olması yada MRS'nin fiyat oranına eşit olması gerektiği sonucu çıkarılabilir.

İki mal tüketen bir tüketici ister belirli bir bütçe ile faydasını maksimize etmek istesin, isterse belirli bir fayda düzeyine minimum harcama ile ulaşmayı hedeflesin, her iki durumda da malların marjinal faydalarının fiyatlarına oranı birbirine eşit olmalıdır. Yani tüketici optimumu için gerekli koşul

$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y}$ *yada*

$\frac{MU_x}{MU_y} = MRS_{yx} = \frac{P_x}{P_y}$ 'tir.

Tüketicinin hem fayda maksimizasyon hem de harcama minimizasyon problemlerinde optimum tüketim bileşimini belirleyen denge koşulları aynı olmakla birlikte talep fonksiyonları farklıdır. Tüketicinin belirli bir faydayı en düşük harcama ile elde etmesini sağlayacak talep fonksiyonları, malların fiyatları ile birlikte tüketicinin fayda düzeyinin bir fonksiyonudur ve Hicksgil talep fonksiyonu olarak adlandırılır. Dolayısıyla x ve y mallarının Hicksgil talep fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

x malı Hicksgil talep fonksiyonu: $X_H^* = X(P_x, P_y, \bar{U})$

y malı Hicksgil talep fonksiyonu: $Y_H^* = Y(P_x, P_y, \bar{U})$

Firmalarda Kısıtlı Optimizasyon

Tıpkı tüketiciler gibi firmalar da faaliyetleri ile ilgili kararlar alırlarken çeşitli kısıtlarla karşı karşıya kalır. Dolayısıyla firmalar faaliyetleri ile ilgili olarak aldıkları kararlarda bir ya da birkaç kısıt altında belirli bir hedefe ulaşmak için optimal çözüm yolunu bulmaya çalışır. Firmaların karşı karşıya kaldığı en temel kısıtlı optimizasyon problemlerinden bazıları şöyle sıralanabilir:

- Belirli bir üretim düzeyini en düşük maliyetle gerçekleştirmek,
- Faktör fiyatları ve üretim teknolojisi veri iken, maksimum üretimi sağlayacak faktör bileşimini (faktör talebini) belirlemek,
- Kapasite kısıtı altında kârını maksimize etmek.

Aslında yukardaki problemlere daha birçoğu eklenebilir. Özellikle firmanın rekabet dereceleri farklı piyasalarda faaliyette bulunduğu göz önünde bulundurulursa firmalar rakip firmaların da kararlarını ve tepkilerini dikkate almaları gereken faklı optimizasyon problemleri ile karşı karşıya kalabilir. Fakat bu ünitede firmaların karşı karşıya kaldıkları en temel kısıtlı optimizasyon problemlerinden ikisi olan maliyet minimizasyonu ve üretim maksimizasyonundan bahsedilecektir.

Maliyet Minimizasyonu

Firmalar çoğu zaman kârlarını maksimize edebilmek için belirli bir üretimi en düşük maliyetle gerçekleştirmeyi hedefler. Emek (L) ve sermaye (K) olmak üzere iki girdi kullanan bir firmanın üretim fonksiyonu aşağıdaki gibi olsun.

$$q = q\,(K, L) \tag{8.42}$$

Bu firmanın sermayeyi P_K ve emeği P_L fiyatlarından satın aldığını varsayarsak o zaman toplam maliyet fonksiyonunu şöyle yazabiliriz:

$$TC = P_K K + P_L L \tag{8.43}$$

Eğer firmanın amacı belirli bir üretim düzeyini en düşük maliyetle gerçekleştirmekse, o zaman firmanın problemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

minimize et: $TC = P_K K + P_L L$

kısıt: $\bar{q} = q\,(K, L)$

Bu problemin çözümü için Lagrange fonksiyonu ve I. dereceden koşulları aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\mathcal{L}\,(K, L, \lambda) = P_K K + P_L L + \lambda\,(\bar{q} - q\,(K, L)) \tag{8.44}$$

$$\mathcal{L}_K \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = P_K - \lambda \frac{\partial q}{\partial K} = 0 \tag{8.45}$$

$$\mathcal{L}_L \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = P_L - \lambda \frac{\partial q}{\partial L} = 0 \tag{8.46}$$

$$\mathcal{L}_\lambda \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \bar{q} - q(K, L) = 0 \tag{8.47}$$

$$\lambda = \frac{P_K}{\partial q / \partial K} = \frac{P_L}{\partial q / \partial L} \tag{8.48}$$

$\partial q / \partial K = MP_K$ (sermayenin marjinal fiziki ürünü) ve $\partial q / \partial L = MP_L$ (emeğin marjinal fiziki ürünü) olduğundan;

Eşitlik (8.48) şöyle yazılabilir:

$$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{P_L}{P_K} \qquad \textbf{(8.49)}$$

Faktörlerin marjinal fiziki ürünlerinin oranı fakatörlerarası marjinal teknik ikame oranına *(MRTS)* eşit oluğundan;

$$\frac{MP_L}{MP_K} = MRTS = \frac{P_L}{P_K} \text{ olur.} \qquad \textbf{(8.50)}$$

Eşitlik (8.50)'de bulunan firmanın optimizasyon koşulu, firmanın maliyet minimizasyonunu sağlayan optimal üretim faktörü talep fonksiyonlarını verecektir.

Üretimde iki faktör kullanan ve belirli bir üretim düzeyini en düşük maliyetle gerçekleştirmek isteyen bir firma üretimde kullandığı faktörlerin marjinal fiziki verimlerinin oranını (MRTS) faktörlerin fiyat oranına eşitlemelidir.

$$\frac{MP_L}{MP_K} = MRTS = \frac{P_L}{P_K}$$

Sermayeyi P_K = ₺20 ve emeği P_L = ₺5'den satın alan bir firmanın üretim fonksiyonu $q = 10K^{0,5} L^{0,5}$'dir. Firma aldığı 3600 birimlik siparişi en ucuz maliyetle gerçekleştirebilmek için her bir faktörden kaç birim satın almalıdır?

SIRA SİZDE 3

Üretim Maksimizasyonu

Firmaların sıkça karşılaştıkları bir başka optimizasyon problemi, sınırlı parasal olanaklarla, yani sınırlı sermaye ile üretimlerini maksimize etmeleridir. Aslında bu problem maliyet minimizasyon probleminin tersidir. Bu optimizasyon probleminde firmanın amaç fonksiyonu üretim fonksiyonu iken, kısıtı maliyet fonksiyonudur. Firmanın kısıtlı üretim maksimizasyon problemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

maksimize et: $q = q(K, L)$

kısıt: $TC = P_K K + P_L L$

Firmanın maliyet kısıtı altında üretiminin maksimize edilmesi için Lagrange fonksiyonunu yazınız ve I. derecen koşulların sonucu olan firma dengesini bulunuz.

SIRA SİZDE 4

Özet

AMAÇ 1

İktisadi fonksiyonlarda kısıtlı optimizasyon kavramını açıklamak

Sonsuz olan insan ihtiyaçları karşısında kaynakların kıt olması bir seçim yapmayı gerektirir. Bu seçim problemi ile bireyler, firmalar, kurumlar, hükümetler kısaca tüm ekonomik birimler karşı karşıya kalacaktır. Bir amacın belirli kısıtlar altında gerçekleştirilmesine **"kısıtlı optimizasyon"** diyoruz. Burada optimizasyon bazen bir maksimizasyon bazende bir minimizasyon problemi olarak karşımıza çıkabilir.

AMAÇ 2

İki değişkenli fonksiyonlarda kısıtlı optimizasyon problemlerini çözmek

$f(x, y)$ gibi amaç fonksiyonunu $g(x, y) = k$ kısıtı altında optimize etmek için üç farklı metot kullanılabilir. Bunlar: yerine koyma, toplam diferansiyel ve Lagrange çarpanı (λ) metodudur. Lagrange çarpanı metodu iktisatta kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan en yaygın metottur. Nedeni ise diğer iki metoda göre önemli bir üstünlüğünün olmasıdır. Bu metotla yapılan çözümlerin özelliği amaç fonksiyonunu bir ya da birden fazla kısıt altında optimize eden değişkenlerin değerleri ile birlikte kısıttaki değişimin amaca etkisini gösteren Lagrange çarpanını da veriyor olmasıdır. Her ne kadar amacın kısıttaki değişime duyarlılığını diğer iki metotta da hesaplamak mümkün olsa da Lagrange çarpanı metodunun bunu doğrudan veriyor olması bir üstünlük olarak görülebilir. İki değişkenli amaç ve kısıt fonksiyonlarında her üç metotta da kısıt altında optimizasyonu sağlayan I. dereceden koşullar: $\frac{f_x}{f_y} = \frac{g_x}{g_y}$ 'tir.

AMAÇ 3

Kısıtlı optimizasyon problemlerinde amaç fonksiyonunun minimum mu yoksa maksimum mu olduğu test etmek

Kısıt altında optimize edilmiş amaç fonksiyonunun minimum mu yoksa maksimum mu olduğunu belirlemek için, sınırlandırılmış Hessian'ın asal minörlerine bakmak gerekir. Sınırlandırılmış Hessian'ın bütün asal minörleri negatifse yani:

$|\bar{H}_2| < 0, |\bar{H}_3| < 0, \ldots, |\bar{H}_n| < 0$ ise, sınırlandırılmış Hessian pozitif belirlidir, Lagrange fonksiyonu, dolayısıyla amaç fonksiyonu, minimumdadır.

Eğer asal minörler pozitiften başlayarak işaret değiştiriyorsa, yani:

$|\bar{H}_2| > 0, |\bar{H}_3| < 0, |\bar{H}_4| > 0, \ldots, (-1)^n |\bar{H}| > 0$ ise sınırlandırılmış Hessian negatif belirli ve Lagrange fonksiyonu maksimumda demektir.

AMAÇ 4

Tüketicinin kısıt altında fayda maksimizasyonu ve harcama minimizasyonu sağlayan optimal tüketim bileşimini bulmak

Fayda fonksiyonu $U = U(x, y)$ ve bütçe kısıt fonksiyonu $M = P_xX + P_yY$ şeklinde bir tüketici, ister faydasını maksimize etmek istesin, isterse belirli bir fayda düzeyine minimum harcama ile erişmeyi hedeflesin, tüketicinin kısıtlı optimizasyon probleminin I. dereceden koşulları;

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y} \text{ yada } \frac{MU_x}{MU_y} = MRS_{yx} = \frac{P_x}{P_y} \text{ 'tir.}$$

AMAÇ 5

Firmanın kısıt altında üretim maksimizasyon ve maliyet minimizasyon problemlerini çözmek

Üretim fonksiyonu ve maliyet fonksiyonu $q = q(K, L)$ ve $TC = P_KK + P_LL$ şeklinde olan bir firma, maliyet kısıtı altında üretimini maksimize etmek yada belirli bir üretim düzeyini en düşük maliyetle gerçekleştirebilmek için, üretimde kullandığı faktörlerin marjinal fiziki ürünlerinin oranını (*MRTS*) faktör fiyatları oranına eşitlemesi gerekmektedir:

$$\frac{MP_L}{MP_K} = MRTS = \frac{P_L}{P_K}$$