DİKKAT!.... BU ÖZET 8 ÜNİTEDİR BURADA İLK ÜNİTE GÖSTERİLMEKTEDİR.

MATEMATİKSEL İKTİSAT

KISA ÖZET

KOLAY AOF

içindekiler

1.ÜNİTE-TÜREV VE KURALLARI

TÜREV VE iKTiSADi ANALiZ

Matematikteki türev kavramı, iktisadi analizde çok önemli bir yer işgal etmektedir. Birçok iktisadi kavram, ancak türev yardımıyla ifade edilebilmektedir. Bu nedenle türev kavramı, iktisadi analizleri matematik yardımıyla yapabilmemiz için önemli bir araç olarak karşımıza çıkmaktadır.

LiMiT VE SÜREKLiLiK

Limit ve süreklilik kavramları, nispeten soyut kavramlar olmakla birlikte matematiksel analiz için oldukça önemlidir. iktisat alanında en fazla kullanılan matematiksel araçlardan biri olan türevin anlaşılabilmesi için, öncelikle limit ve süreklili kavramlarını bilmemiz gerekir.

Limit Kavramı

Limit, bir fonksiyonun bağımsız değişkeni belli bir değere yaklaşırken, fonksiyonun yaklaştığı değeri gösterir. y = f (x) gibi bir fonksiyonu ele alalım. Bu fonksiyonda x değişkeni a gibi bir değere yaklaşırken y'nin yaklaştığı değer limit kavramı ile ifade edilir ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Bu ifade **"x, a'ya giderken (yaklaşırken) fonksiyonun limiti L'dir"** şeklinde okunur.

Sağdan Limit Bir f (x) fonksiyonunun, x a'ya yaklaşırken sağdan limiti x a'ya, a'dan daha büyük değerlerden yaklaşırken fonksiyonun yaklaştığı değerdir ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Soldan Limit

Bir f (x) fonksiyonunun, x a'ya yaklaşırken soldan limiti x a'ya, a'dan küçük değerlerden yaklaşırken fonksiyonun yaklaştığı değerdir ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Bir Fonksiyonun Limitinin Bulunması

Bir y = f (x)fonksiyonunun x a'ya yaklaşırken limitini bulmak için x'e, soldan ve sağdan a'ya yaklaşan değerler vererek y'nin hangi değere yaklaştığına bakmamız gerekir. Örneğin y = x2 fonsiyonunun, x 2'ye yaklaşırken limitini bulmaya çalışalım. Önce x 2'ye soldan yaklaşırken fonksiyonun hangi değere yaklaştığında bakalım. x'e, 2'ye soldan yaklaşan değerler verdiğimizde fonksiyonun değerinin 4'e
yaklaştığını görmekteyiz. Bu durum Tablo 1.1'in ilk iki sütununda görülmektedir. Aynı şekilde x'e 2'ye sağdan yaklaşan değerler verdiğimizde, fonksiyonun değerinin yine 4'e yaklaştığını görmekteyiz. Bu durum ise tablonun son iki sütününda görülmektedir. Her iki limit de aynı olduğu için bu fonksiyonun limitini aşağıdaki gibi yazarız:

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = \lim_{x \to 2^+} x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

Limitin Özellikleri

Herhangi bir fonksiyonun limitini bulurken limit ile ilgili aşağıdaki özellikler işimizi kolaylaştıracaktır:

L1: $\lim_{x \to a} c = c$

Örnek: $\lim_{x \to 2} 5 = 5$

Süreklilik

Bir fonksiyonun limiti mevcut ise ve bu limit fonksiyonun değerine eşit ise o fonksiyon **"sürekli"** bir fonksiyondur. Süreklilik özelliği aşağıdaki gibi tanımlanır: Bir f (x) fonksiyonu

1. a noktasında tanımlı ise, yani f (a) mevcut ise
2. a noktasında limiti var ise:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

3. ve bu limit, fonksiyonun s noktasındaki değerine eşit ise

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = f(a)$$

TÜREV

iktisatçıların araştırdıkları soruların çoğu, ilişkili iki değişkenden birinin değeri artarken diğerinin değerinin hangi yönde ve ne kadar değişeceği ile ilgilidir. Bu sorulardan bir kaçını örnek olması amacıyla sıralayabiliriz:

• Acaba bir yıl daha fazla okula gitmenin bireylerin ortalama ücretlerine etkisi ne kadardır?
• Bir malın fiyatındaki 1 liralık artış, mala olan talebi ne kadar azaltacaktır?
• Döviz kurlarındaki 1 kuruşluk artış, net ihracatı ne yönde ve hangi miktarda değiştirecektir?
• Üretim miktarındaki bir birimlik artış, toplam maliyetleri ne kadar artıracaktır?
• Vergi oranındaki %1'lik bir artış, vergi hasılasını artıracak mıdır, yoksa azaltacak mıdır?

iktisat gibi diğer bütün bilim dalları, benzer sorularla doludur. Bütün bu sorulara matematikteki türev kavramı yardımıyla cevap bulunabilir.

Değişimi Oranı ve Türev

Bir y = f (x) fonksiyonunun **değişim oranı** veya **eğimi,** y değişkenindeki değişimin x değişkenindeki değişime oranı olarak ifade edilir:

$$\text{Değişim oranı} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Eğer f (x) doğrusal bir fonksiyon ise değişim oranı x'in bütün değerlerinde aynıdır. Doğrusal olmayan bir fonksiyonda ise değişim oranı farklı değerler alacaktır.

Türevin tanımından hareketle, y = 3x + 2x2 foksiyonunun türevini bulalım. Bunun için x'in herhangi bir x0 değerinden x1 değerine değiştiğini düşünerek fonksiyonun değişim oranını yazalım:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\left[3(x_0 + \Delta x) + 2(x_0 + \Delta x)^2\right] - \left[3(x_0) + 2(x_0)^2\right]}{\Delta x}$$

Türevi Alınabilir Fonksiyonlar

Her foksiyonun türevi alınabilir mi? Bu sonun cevabı "hayır" olacaktır. Bir fonksiyonun türevinin alınabilmesi için, iki koşulu sağlaması gerekir: (1) sürekli olması, (2) keskin köşelere sahip
olmaması.

Türevin Anlamı

Bir fonksiyonun türevi, bize fonksiyon hakkında ne gibi bilgiler verir? Bu soruya bir cevap aramadan önce, fonksiyonun belli bir noktadaki türevinin nasıl bulunacağını görelim. Bir fonksiyonun türevinin x0 gibi belli bir noktadaki değerini, x0 değerini türev ifadesinde yerine koyarak bulabiliriz. Bunun için aşağıdaki gösterimlerden herhangi birini kullanırız:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \quad \text{veya} \quad f'(x_0)$$

Örneğin $y = 3 + 2x^2$ foksiyonunun türevinin $x_0 = 2$ noktasındaki değeri,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = 3+4(2)=11 \quad \text{veya} \quad f'(2)=3+4(2)=11$$

olarak bulunur. Bulduğumuz 11 değeri, x = 2 noktasında fonksiyona teğet olan doğrunun eğimidir.

TÜREV ALMA KURALLARI

Fonksiyonların türevlerini alırken her zaman değişim oranının limitini almakla uğraşmamıza gerek yoktur. Bunun yerine kısa yoldan türev almak için geliştirilmiş kuralları uygularız. Aşağıda y = f (x) şeklindeki bir fonksiyonun türevini alırken kullanılacak kurallar verilmiştir.

Sabit Fonksiyon Kuralı

k bir sabit ise, y = k gibi bir sabit fonksiyonun türevi sıfırdır: f' (x) = 0. Örneğin y = 3/5 fonksiyonunun türevi f' (x) = 0 olacaktır. Bununla birlikte g (x) = k . f (x) gibi bir fonksiyonun türevi ise g (x) = k . f' (x) olarak elde edilir.

Kuvvet Fonksiyonu Kuralı

y = xk gibi bir fonksiyonun türevini almak için, fonksiyon x'in kuvveti olan n ile çarpılır ve x'in kuvvetinden bir çıkarılır: f' (x) = kxk–1. Bunu birkaç örnek yardımı ile görelim:

$$y = x^3, \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$y = x^{3/4}, \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$$

Toplam Kuralı

f (x) ve g (x) gibi, türevi alınabilir iki fonksiyonun toplamlarının türevi, fonksiyonların ayrı ayrı türevlerinin toplamına eşittir:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] \pm \frac{d}{dx}\left[g(x)\right] = f'(x) \pm g'(x)$$

Bu kuralı kullanarak, $y = 4x^3 + \sqrt{x}$ gibi bir fonksiyonun türevi,

$$\frac{d}{dx}\left[4x^3 + \sqrt{x}\right] = \frac{d}{dx}\left(4x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = 12x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde, $y = 2x^5 - 4x^{-3} + 3x - 15$ öfonksiyonunun türevi ise aşağıdaki gibi bulunur:

$$\frac{d}{dx}\left[2x^5 - 4x^{-3} + 3x - 15\right] = \frac{d}{dx}\left(2x^5\right) - \frac{d}{dx}\left(4x^{-3}\right) + \frac{d}{dx}\left(3x\right) - \frac{d}{dx}\left(15\right)$$
$$= 10x^4 + 12x^{-4} + 3$$

Çarpım Kuralı

iki fonksiyonun çarpımı olarak yazılabilen bir fonksiyonun türevini alırken aşağıdaki kural kullanılır:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] + f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

Bölüm Kuralı

f (x) ve g (x) gibi iki fonksiyonun bölümünün türevini almak için, aşağıdaki kural uygulanır:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Zincir Kuralı

f (g (x)) gibi bir bileşke fonksiyonun türevi f' (x) = f' (g (x)) g' (x) olarak elde edilir. **Zincir kuralı** adı verilen bu yöntemde, önce dış fonksiyonun türevi alınır ve iç fonksiyonun türevi ile çarpılır. Zincir kuralını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$y = f(z),\ z = g(x) \Rightarrow y = f(g(x)),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} \quad \text{veya } f'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

Üstel Fonksiyon Kuralı

y = enx şeklindeki bir üstel fonksiyonun türevini alırken aşağıdaki kural uygulanır.

$$\frac{d}{dx}\left(e^{nx}\right) = ne^{nx}$$

Logaritmik Fonksiyon Kuralı

y = 1n x gibi logaritmik bir fonksiyonunun türevi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Logaritmik fonksiyon kuralı sıklıkla, bir değişkenin büyüme oranını bulmak için kullanılır. Bir y = f (x) fonskiyonunun **"anlık büyüme oranı"** aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$g_y = \frac{dy/dx}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Trigonometrik Fonksiyon Kuralı

Temel trigonometrik fonksiyonların türevleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \text{ ve } \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

Kapalı Foksiyon Kuralı

Buraya kadar yaptığımız türev alma işlemlerinde hep, y = f (x) şeklindeki fonksiyonların türevlerini bulduk. iktisatta birçok ilişki kapalı fonksiyonlar şeklinde ifade edilir.

Bu fonksiyonu y cinsinde çözerek y = f (x) formunda ifade etmemiz mümkün değildir. Buna rağmen, böyle bir fonksiyon için dy /dx türevini bulabiliriz. Bunun için kapalı fonksiyon kuralını uygulamamız gerekir:

$F(y, x) = 0$ ise,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left.\frac{dF(y,x)}{dx}\right|_{y \text{ sabit}}}{\left.\frac{dF(y,x)}{dy}\right|_{x \text{ sabit}}} = -\frac{F_x}{F_y}, \qquad F_y \neq 0$$

iKiNCi VE DAHA YÜKSEK DERECEDEN TÜREVLER

Daha önce, bir fonksiyonun türevinin de yine bir fonksiyon olduğuna dikkat çekmiştik. Bu gerçek, bir fonksiyonun türevinin de türevinin alınabileceği anlamına gelir. Yani, türevini aldığımız bir fonksiyonun, tekrar türevini alabiliriz. Bunun için tek koşul, ilk türevin sabit bir sayı olmamasıdır. ikinci kez türev alınarak elde edilen bu fonksiyona **"ikinci dereceden türev",** veya kısaca **"ikinci türev"** adı verilir. Aslında, ikinci türev de bir fonksiyon olduğuna göre, onun da türevi alınabilir.

y = f (x) gibi bir fonksiyonun ikinci türevi, bu fonksiyonun türevinin türevidir ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\frac{d\left(f'(x)\right)}{dx} \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \equiv \frac{d^2y}{dx^2} \equiv f''(x) \equiv f^{(2)}(x)$$

Eğimi sürekli artan, yani ikinci türevi daima pozitif olan fonksiyonlar **dışbükey fonksiyon** olarak adlandırılır. Bu fonksiyonların yerel minimum noktaları mevcuttur. Örneğin, y = x2 fonksiyonu dışbükey bir fonksiyondur. Bu fonksiyon x = 0 noktasında en küçük değerine ulaşır.

MARJiNAL FONKSiYONLAR

Türevin iktisattaki en önemli kullanım alanlarından biri marjinal fonksiyonlardır. Bir fonksiyonun türevi alınarak elde edilen fonksiyon, **"marjinal fonksiyon"** olarak adlandırılır. Marjinal fonksiyon, bir fonksiyonun bağımsız değişkenindeki çok küçük bir değişimin fonksyonun değerini nasıl değiştirdiğini gösterir.

Marjinal Hasıla

Bir malın satışından elde edilen **toplam hasıla** (TR), malın fiyatı (P) ile satılan mal miktarının (Q) çarpımına eşittir:

$$TR = Q$$

Toplam hasıla fonksiyonu **monopol piyasası**nda faaliyet gösteren bir firmaya ait ise firmanın karşı karşıya kaldığı fiyat talep edilen miktara bağlı olacaktır. Fiyatı, talep edilen miktarın bir fonksiyonu olarak gösteren denkleme talep fonksiyonu adı verildiğini biliyoruz. Doğrusal bir talep fonksiyonunu P = a – bQ şeklinde yazabiliriz. Bu denklemde a > 0 ve b > 0 "katsayı" adını verdiğimiz sabit değerlerdir.

Bu talep fonksiyonunu toplam hasıla ifadesinde yerine koyarak **monopolcü firma**nın toplam hasıla fonksiyonunu sadece satılan mal miktarının bir fonksiyonu olarak elde edebiliriz:

$$TR = (a - bQ)\,Q$$

$$TR = aQ - bQ^2$$

iktisat derslerinde **marjinal hasıla** (MR), satış miktardaki ilave bir birim artışın, toplam hasılada meydana getireceği değişiklik olarak tanımlanmaktadır. Bu tanımı değişim oranı olarak aşağıdaki gibi ifade ederiz:

$$\frac{\Delta TR}{\Delta Q}$$

Hasıla ile ilgili diğer bir kavram da **ortalama hasıla**dır. Ortalama hasıla, satılan birim başına hasıla değeridir ve toplam hasılanın satılan mal miktarına bölünmesiyle elde edilir:

$$AR = \frac{TR}{Q}$$

Hem ortalama hasıla, hem de marjinal hasıla dikey ekseni aynı noktadan kesmektedir. Bu nedenle bütün Q değerleri için marjinal hasıla daima ortalama hasılanın altında olacaktır: MR ² AR.

Marjinal Maliyet

Hasıla için yaptığımız analizin bir benzerini maliyet için de yapabiliriz. **Marjinal maliyet,** üretim miktarındaki bir birim artışın toplam maliyette meydana getirdiği artıştır. Marjinal hasılanın toplam hasıla fonksiyonunun türevi olduğu gibi, marjinal maliyet de toplam maliyet fonksiyonunun türevidir. Üretim miktarının bir fonksiyonu olarak ifade edebileceğimiz toplam maliyet fonksiyonunu TC ile, marjinal maliyet fonksiyonunu ise MC ile gösterirsek, marjinal maliyet aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = TC'$$

Marjinal Ürün

iktisat derslerinde herhangi bir üretim faktörünün marjinal fiziki ürününü, o üretim faktöründen ilave bir birimin kullanılması halinde toplam üretim miktarında meydana gelecek artış olarak öğrenmiştik. Bu tanım, üretim fonksiyonunun türevine karşılık gelmektedir.

İlk özellik emeğin marjinal fiziki ürününün pozitif olması gerektiğini söylemektedir. ikinci özellik ise, **azalan marjinal fiziki** ürün veya **azalan verimler yasası**na karşılık gelmektedir.

Üretimde kullanılan üretim faktörlerini sermaye ve emek olarak iki gruba ayırabiliriz. Üretim sürecinde genellikle, üretim miktarını değiştirmeden, bir faktörün diğer faktör yerine ikâme edilmesi mümkündür.

Bir faktörden daha fazla kullanıldığında, artırılan miktarı ile üretim miktarını sabit tutmak için diğer faktörden azaltılması gereken miktara arasındaki orana **marjinal teknik ikâme oranı** denir ve MRTS olarak gösterilir.

$$MRTS = \frac{dK}{dL}$$

Bu fonksiyon, **eş-ürün eğrisi** olarak bilinir. Marjinal teknik ikâme oranını bulmak için kapalı fonksiyon kuralını uygulamamız gerekir:

$$F_K = 1/3\, K^{-2/3} L^{2/3}$$

$$F_L = 2/3\, K^{1/3} L^{-1/3}$$

$$MRTS = \frac{dK}{dL} = -\frac{F_L}{F_K} = -\frac{2/3\, K^{1/3} L^{-1/3}}{1/3\, K^{-2/3} L^{2/3}} = -\frac{2/3}{1/3}\frac{K}{L} = -2\frac{K}{L}$$

,

ESNEKLiK
Firmaların karşı karşıya kaldıkları önemli problemlerden biri, fiyat değişikliklerinin toplam hasılalarında yapacağı etkinin tahmin edilmesidir. Örneğin, bir fiyat indirimi durumunda fiyatın düşmesi, toplam hasılayı azaltıcı bir etki yaratırken, satışlardaki indirim nedeniyle gerçekleşecek olan artış, toplam hasılayı artırıcı bir etki yaratacaktır. Bu nedenle net etkinin nasıl olacağı pek açık değildir.
Talebin fiyat esnekliği, veya kısaca talep esnekliği, fiyattaki bir değişimin satılan mal miktarını nasıl etkileyeceğini gösteren bir ölçüttür. Talep esnekliği, satılan mal miktarındaki yüzde değişimin fiyattaki yüzde değişime bölünmesiyle bulunur:

$$E = \frac{\text{Miktardaki yüzde değiş im}}{\text{Fiyattaki yüzde değiş im}}$$

Bu şekilde hesaplanan esneklik **nokta esneklik** olarak adlandırılır. Fiyat ile talep edilen miktar arasında ters yönlü bir ilişki olduğu için, bulacağımız esneklik değeri negatif olacaktır
= Q (P) fonksiyonu **ters talep fonksiyonu** olarak da adlandırılır. Ters talep fonksiyonunu elde etmek için,
talep fonksiyonunu Q için çözmemiz gerekir:

$$P = 50 - 2Q \quad \Rightarrow \quad 2Q = 50 - P \quad \Rightarrow \quad Q = 25 - \frac{1}{2}P$$

TÜKETiM VE TASARRUF
iktisat derslerinden Keynesyen tüketim fonksiyonunun toplam tüketim harcamalarını (C) , gelir (Y) ile açıkladığını biliyoruz: C (Y). Bu fonksiyon, kamu sektörünün ve dolayısıyla vergilerin olmadığı basit bir ekonomi için, genellikle C = c0 + c1Y şeklindeki doğrusal bir fonksiyon olarak yazılır. Fonksiyondaki c1 katsayısı özel bir öneme sahiptir. **Marjinal tüketim eğilimi** adı verilen bu katsayı, gelirdeki bir liralık artışın ne kadarının tüketime gittiğini gösterir. Bu açıklamadan anlaşılacağı gibi aslında marjinal
tüketim eğilimi, tüketim fonksiyonunun türevinden başka bir şey değildir:

$$\text{Marjinal Tüketim Eğilimi } (MPC) = \frac{dC}{dY} = C' = c_1$$

Marjinal tasarruf eğilimi, gelirdeki bir liralık artışın ne kadarının tasarruf edildiğini gösterir:

$$\text{Marjinal Tasarruf Eğilimi } (MPS) = \frac{dS}{dY} = S' = 1 - c_1$$

2.ÜNİTE-TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

Fonksiyonla ilişkili Temel Kavramlar
Küme: Küme birtakım nesnelerden oluşan bir topluluktur. Bir kümeyi oluşturan nesnelere, bu kümenin elemanları adı verilir.
Sıralı ikili: A ve B gibi iki küme verilsin. a Î A ve b Î B olmak üzere, bunlardan oluşturulan (a,b) çiftine bir sıralı ikili denir. (a,b) sıralı ikilisinde a'ya sıralı ikilinin birinci terimi (koordinatı), b'ye sıralı ikilinin ikinci terimi (koordinatı) adı verilir. (a,b) ve (c,d) gibi iki sıralı ikilinin eşit olabilmesi için gerek ve yeter koşul, sıralı ikililerin birinci ve ikinci koordinatlarının karşılıklı olarak eşit olmasıdır. Yani

$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ ve $b = d$ olmalıdır.

Bağıntı: A ve B kümeleri verilmiş olsun. A x B kümesinin her alt kümesine A kümesinden B kümesine bir bağıntı denir.