İkinci Dereceden Denklemler

İkinci Dereceden Denklemler

Tanım:

a, b, c $\in$IR ve a $\neq$ 0 olmak üzere,
$ax^2 + bx + c = 0$ biçimindeki eşitliklere,
ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

Bu denklemde x bilinmeyen, a, b, c katsayılardır.

Bu denklemi doğrulayan (gerçekleyen, sağlayan) gerçel sayılara denklemin **gerçek kökleri**, kökleri bulma işlemine de **denklemi çözme** denir.

Denklemin gerçel köklerinden oluşan kümeye **çözüm kümesi** adı verilir.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

ifadesine denklemin **diskriminantı** denir.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin köklerinin durumları;

i) $\Delta > 0$ ise,
denklemin farklı iki gerçel kökü vardır.
Bu kökler,

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ dır.

Bu durumda çözüm kümesi iki elemanlıdır.
Ç.K. = { x_1, x_2 } dir.

ii) $\Delta = 0$ ise,
denklemin eşit (çakışık) iki gerçel kökü vardır.
Bu durumda çözüm kümesi bir elemanlı ve verilen denklem tam karedir.

Çakışık kökler: $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ dır

Ç.K. = { x_1=x_2 } dir.

$\sqrt{\Delta} = 0$ olduğundan,
$x_1 = x_2 = \dfrac{-b \mp 0}{2a} = -\dfrac{b}{2a}$ olur.

iii) $\Delta < 0$ ise,
denklemin gerçel kökleri yoktur.
R de çözüm kümesi boş kümedir.
Ç.K.=$\varnothing$ dir.

Karekökün reel sayılarda tanımlı olması için, içinin sıfırdan büyük veya eşit olması gerekir. $\sqrt{\Delta \geq 0}$

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri diskriminant yardımıyla veya çarpanlarına ayrılarak bulunur.

a + b + c = 0 ise, köklerden biri 1 dir.

a – b + c = 0 ise, köklerden biri –1 dir.

a ile c zıt işaretli ise,
Δ > 0 olduğundan kökler daima gerçel sayıdır.

b = 0 ve a ile c <u>zıt</u> işaretli ise,
kökler simetriktir.
$x_1 = -x_2$ veya $|x_1| = |x_2|$ dir.

c = 0 ise,
köklerden biri <u>sıfırdır</u>.

Parametreli Denklemler

Tanım:

ikinci dereceden bir denklemde, değişkenden başka sabit veya sabitler varsa bu denklemlere **parametreli denklemler** denir.

İkinci Dereceden Denklemler

İkinci Dereceden Denkleme Dönüştürülebilen Denklemler

A) Polinomların Çarpımı Şeklindeki Denklemler

$$R(x).(Px).Q(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} &R(x) = 0 \text{ veya} \\ &P(x) = 0 \text{ veya} \\ &Q(x) = 0 \text{ dır.} \end{aligned}$$

B) Rasyonel Denklemler

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0 \text{ ve } Q(x) \neq 0$$

Öncelikle,
verilen denklemde $Q(x) \neq 0$ denkleminin kökleri bulunur.

Daha sonra,
paydalar eşitlenir ve denklem paydadan kurtarılır.

Standart biçime getirilen denklemin kökleri bulunur.

$Q(x) \neq 0$ denkleminin kökleri ile aynı olanlar çözüm kümesinden çıkarılır.

C) Köklü İfade İçeren Denklemler

$n \in N^+$ olmak üzere,

$$\sqrt[2n]{P(x)} = |Q(x)|, \quad \sqrt[2n+1]{P(x)} = Q(x)$$

biçimindeki denklemlerdir.

Köklü ifade içeren denklemleri çözmek için,

- Köklü ifade (veya köklü ifadelerden birisi) eşitliğin bir yanında yalnız bırakılır.
- Eşitliğin her iki tarafının uygun kuvveti alınır.
- Kökten arındırılmış denklem çözülür, bulunan köklerin köklü ifadelerin tanım aralığına uygun olup olmadığı kontrol edilir.

D) Mutlak Değerli Denklemler

$n \in N^+$ olmak üzere,

$$|f(x)| = \sqrt[2n]{[f(x)]^{2n}} = \begin{cases} -f(x), & f(x) \leq 0 \text{ ise} \\ f(x), & f(x) \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

mutlak değer tanımından faydalanılarak denklem çözülür.

E) Yardımcı Bilinmeyen Kullanarak Denklem Çözme (Değişken Değiştirme)

Denklemde uygun şekilde değişkenler kullanılarak denklemin derecesi ikinci dereceye düşürülür.

İkinci Derece Denkleminin Kökleri ile Kat Sayıları Arasındaki Bağıntılar

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde,

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\Delta}}{a} \text{ dır.}$$

Buna göre;

i. Köklerin toplamı:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

ii. Köklerin çarpımı:

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

iii. Köklerin farkı:

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

iv. Köklerin tersleri toplamı:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$$

v. Köklerin kareleri toplamı:

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

vi. Köklerin karelerinin tersleri toplamı:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$$

vii. Köklerin küpleri toplamı:

$$x_1^3 + x_2^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

viii. Köklerin küplerinin tersleri toplamı:

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{3abc - b^3}{c^3}$$

İkinci Dereceden Denklemler

Kökleri Verilen İkinci Dereceden Denklemi Kurma

Kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden denklem

$$(x - x_1).(x - x_2) = 0$$

şeklindedir.

Parantezler kaldırılarak denklem düzenlenirse;

$$x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\text{Kökler Toplamı} \to T}x + \underbrace{x_1.x_2}_{\text{Kökler Çarpımı} \to Ç} = 0 \text{ olur.}$$

Kökler Toplamı → T, Kökler Çarpımı → Ç olsun.

Buradan;

$$\boxed{x^2 - Tx + Ç = 0 \text{ denklemi bulunur.}}$$

> **$ax^2 + bx + c = 0$**
> **denkleminin köklerinin çarpma işlemine göre terslerini kök kabul eden ikinci dereceden denklem**
> **$cx^2 + bx + a = 0$ şeklindedir.**
> **(a ile c yer değiştirir.)**

> **$ax^2 + bx + c = 0$**
> **denkleminin köklerinin toplama işlemine göre terslerini kök kabul eden ikinci dereceden denklem**
> **$ax^2 - bx + c = 0$ şeklindedir.**
> **(sadece b işaret değiştirir.)**

Toplamları ve Çarpımları Verilen İki Sayının İkinci Dereceden Denkleme Dönüştürülerek Bulunması

İki sayı m ve n olmak üzere,

$m + n = T$
$m . n = Ç$ olsun.

$x^2 - Tx + Ç = 0$ denkleminin kökleri m ve n dir.

Üçüncü Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

Tanım: a, b, c, d $\in$R ve a$\neq$0 olmak üzere,

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

biçimindeki denklemlere **üçüncü dereceden denklem** denir.
Bu denklemin en az bir gerçel kökü vardır.

Üçüncü Dereceden Denklemin Kökleri ile Katsayıları arasındaki bağıntılar:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 ise;

i. Kökler toplamı:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

ii. Köklerin ikişerli çarpımlarının toplamı:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

iii. Kökler çarpımı;

$$x_1 . x_2 . x_3 = -\frac{d}{a}$$

iv. Köklerin tersleri toplamı;

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{c}{d}$$

v. Köklerin kareleri toplamı;

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

> **$x = 1$ kök ise, $a + b + c + d = 0$**

> **$x = -1$ kök ise, $-a + b - c + d = 0$ dır.**

İkinci Dereceden Denklemler

	x_1 , x_2 , x_3 kökleri aritmetik dizinin ardışık üç terimi ise, $x_1 + x_2 + x_3 = 3x_2 = -\dfrac{b}{a}$

	x_1 , x_2 , x_3 kökleri geometrik dizinin ardışık üç terimi ise, $x_1 . x_2 . x_3 = (x_2)^3 = -\dfrac{d}{a}$

	Kökleri x_1 , x_2 ve x_3 olan üçüncü derece-den denklem $T_1 = x_1 + x_2 + x_3$ $T_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2 x_3$ $Ç = x_1x_2x_3$ olsun. $x^3 - T_1x + T_2x - Ç = 0$ formülü ile oluşturulur.