1.

a) $f(x)=4x-3 \rightarrow f'(x)=4 \rightarrow f'(101)=4$

b) $f(x)=x^3-2x+2007 \rightarrow f'(x)=3x^2-2 \rightarrow f'(1)=3-2=1$

c) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x \rightarrow f'(x)=3.\frac{x^2}{3}+2.\frac{x}{2}-1$

$f'(x)=x^2+x-1 \rightarrow f'(2)=2^2+2-1=5$

d) $f(x)=x^{2008}-x^{2007}+\sqrt{2}$

$f'(x)=2008.x^{2007}-2007.x^{2006}$

$f'(1)=2008-2007=1$

2. $f(x)=x^2-\sqrt{x}=x^2-x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x)=2x-\frac{1}{2}.x^{\frac{1}{2}-1}=2x-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$f'(1)=2.1-\frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

3. $f(x)=a^2x^2+2(a-2)x+1$

$f'(x)=2a^2x+2(a-2) \rightarrow f'(1)=2a^2+2a-4$

$f'(1)=0 \rightarrow 2a^2+2a-4=0$

$a^2+a-2=0$ kökleri a_1 ve a_2 olsun.

$a_1+a_2=-\frac{1}{1}=-1$ bulunur.

$\left[ax^2+bx+c=0 \rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}\right]$

4. $f(x)=ax^2+bx+c \rightarrow f'(x)=2ax+b$

$f(1)=0 \rightarrow a+b+c=0$

$f'(1)=5 \rightarrow 2a+b=5$

$a+b=2$ olduğundan $a+b+c=0 \rightarrow 2+c=0 \rightarrow c=-2$

$2a+b=5 \rightarrow a+a+b=5 \rightarrow a+2=5 \rightarrow a=3$

$a.c=3.(-2)=-6$ bulunur.

5. $h(x)=x^2-2x$

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}.\lim_{x\to 2}\left(h(x)-h(2)\right)$

$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}.\left(h(x)-h(2)\right)\right]=\lim_{x\to 2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=h'(2)$

$h'(x)=2x-2 \rightarrow h'(2)=2.2-2=2$ bulunur.

6. $f(x)=tx^5-5$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{5h}=\frac{1}{5}.f'(x)$

$f'(x)=5tx^4 \rightarrow \frac{1}{5}f'(x)=\frac{5tx^4}{5}=tx^4$ bulunur.

7. $f(x)=x^{-2}+x^{-3}-1$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(-1)-f(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{-\left(f(x)-f(-1)\right)}{x-(-1)}=-f'(-1)$$

$f'(x)=-2x^{-3}-3.x^{-4}$

$f'(-1)=-2.(-1)^{-3}-3.(-1)^{-4}=(-2).(-1)-3.1$

$=2-3=-1$

$-f'(-1)=-(-1)=1$ bulunur.

8. $f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2 \ , & x<2 \\ 5x-1 \ , & x\geq 2 \end{cases}$

a) $2^-<2 \to \lim\limits_{x\to -2}(x^3-3x^2)=2^3-3.2^2=-4$

$2^+>2\to \lim\limits_{x\to 2^+}(5x-1)=5.2-1=9$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ olduğundan

f(x) fonksiyonu x=2 de sürekli <u>değildir</u>. O halde, $f'(2)$ <u>yoktur</u>.

b) $1<2 \to f(x)=x^3-3x^2 \to f'(x)=3x^2-6x$

$f'(1)=3-6=-3$ olur.

$3>2\to f(x)=5x-1 \to f'(x)=5 \to f'(3)=5$ olur.

$f'(1)+f'(3)=-3+5=2$ bulunur.

9. $f(x)=\begin{cases} x^2-3x, & x<1 \\ 3x-5 \ , & x\geq 1 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-3x)=1^2-3.1=-2$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(3x-5)=3.1-5=-2$

$f(1)=3.1-5=-2$ ve $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

olduğundan x=1 noktasında f(x) fonksiyonu süreklidir.

b) $1^-<1 \to f'(x)=2x-3 \to f'(1^-)=2.1-3=-1$

$1^+>1 \to f'(x)=3 \to f'(1^+)=3$

c) f(x) fonksiyonunun x=1 noktasında türevli olması için, bu noktada sürekli ve $f'(1^-)=f'(1^+)$ olmalıdır.

f(x) fonksiyonu x=1 de süreklidir. [a şıkkından]

$f'(1^-)=-1$ ve $f'(1^+)=3$ [b şıkkından]

$f'(1^-)\neq f'(1^+)$ olduğundan f(x) fonksiyonu x=1 de türevli <u>değildir</u>.

10. $f(x)=\begin{cases} x^2+2mx, & x<1 \\ nx^2-3x \ , & x\geq 1 \end{cases}$

$\forall x\in R$ için f(x) fonksiyonu türevli olduğundan x=1 de sürekli ve türevlidir.

$1^-<1\to \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+2mx)=1+2m$

$1^+>1\to \lim\limits_{x\to 1^+}(nx^2-3x)=n-3$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\to 1+2m=n-3$ (**I**)

$1^-<1\to f(x)=x^2+2mx\to f'(x)=2x+2m \to f'(1^-)=2+2m$

$1^+>1\to f(x)=nx^2-3x \to f'(x)=2nx-3 \to f'(1^+)=2n-3$

$f'(1^-)=f'(1^+)\to 2+2m=2n-3$ (**II**)

(**I**)$\to$1+2m=n–3$\to$2m=n–4

(**II**)$\to$2+2m=2n–3

$2+(n-4)=2n-3 \to n=1\to m=-\frac{3}{2}$ bulunur.

Pratik ç☺züm:

$\forall x\in R$ için f(x) fonksiyonu türevli olduğundan

$x^2+2mx=nx^2-3x \to n=1$ ve $m=-\frac{3}{2}$ dir.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2.(-\frac{3}{2})x=x^2-3x, & x<1 \\ 1.x^2-3x=x^2-3x \ , & x\geq 1 \end{cases}$$

$f:R\to R$, $f(x)=x^2-3x$ olur.

$f'(x)=2x-3 \to f'(0)=2.0-3=-3$ ve $f'(2)=2.2-3=1$

$f'(0)+f'(2)=-3+1=-2$ bulunur.

Kavrama ~ 2

1. $f(x)=(1-x^2).(x^2+x)$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+2h)-f(1)}{h} = 2.f'(1)$

$f'(x)=[-2x].(x^2+x)+(1-x^2).[2x+1]$

$f'(1)=(-2).(2)+0.[3]=-4$

$2f'(1)=2.(-4)=-8$ bulunur.

2. $f(x)=\dfrac{g(x)}{x} \to f'(x)=\dfrac{g'(x).x-g(x).1}{x^2}$

$f'(2)=\dfrac{g'(2).2-g(2)}{2^2} \to 1=\dfrac{3.2-g(2)}{4}$

$4=6-g(2) \to g(2)=2$ bulunur.

3. $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+1 \to \quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{1}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$ bulunur.

4. $f(x)=\dfrac{x-a}{x^2} \to f'(x)=\dfrac{[1].x^2-(x-a).[2x]}{(x^2)^2}$

$f'(x)=\dfrac{x^2-2x^2+2ax}{x^4}=\dfrac{-x^2+2ax}{x^4}$

$f'(x)=0 \to -x^2+2ax=0$ denkleminin kökleri ise,

$x_1+x_2=2a$ [$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$]

$2a=-2$

$a=-1$ bulunur.

5. $f(x)=(x^2-ax).(2+3x)$

$f'(x)=[2x-a].(2+3x)+(x^2-ax)[3]$

$=4x+6x^2-2a-3ax+3x^2-3ax = 9x^2+(4-6a)x-2a$

$f'(x)=bx^2-2x-c$ olduğuna göre,

$9x^2+(4-6a)x-2a=bx^2-2x-c$

$b=9$

$4-6a=-2 \to a=1$,

$-2a=-c \to -2.1=-c \to c=2$

$a+b-c=1+9-2=8$ bulunur.

6. $f(x)=\dfrac{2x^2.\tan x}{\dfrac{5x}{\cot x}}=2x^2.\tan x.\dfrac{\cot x}{5x}$

$f(x)=\dfrac{2x^2.[\tan x.\cot x]}{5x}=\dfrac{2x.[1]}{5}$

$f(x)=\dfrac{2x}{5}$ olur.

$f'(x)=\dfrac{2}{5}$ ise, $f'(-21)=\dfrac{2}{5}$ bulunur.

7. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}=x-1$

$g(x)=2\sqrt{x}$

$f'(x)=1 \to f'(1)=1$

$g'(x)=2\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \to g'(1)=1$

$(f+2g)'(1)=f'(1)+2.g'(1)$

$=1+2.1=3$ bulunur.

8. $f(x)=a\sqrt{x}-1$ $\quad g(x)=bx^2-3$

$f'(x)=a.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad g'(x)=2bx$

$f'(4)=a.\dfrac{1}{2\sqrt{4}}$ $\quad g'(1)=2b.1=2b$

$=\dfrac{a}{4}$

$f'(4)=g'(1)\rightarrow \dfrac{a}{4}=2b \rightarrow a=8b$

$f(x)=a\sqrt{x}-1$ $\quad g(x)=bx^2-3$

$f(9)=3a-1$, $\quad g(1)=b-3$ olur.

$f(9)=g(1)\rightarrow 3a-1=b-3$ [$a=8b$]

$3.8b-1=b-3$

$24.b-1=b-3$

$23b=-2$

$b=-\dfrac{2}{23}$ bulunur.

9. $f(x)=x^2.(x^3-1)-\sqrt[3]{x}$

$f(x)=x^5-x^2-\sqrt[3]{x}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(1)-f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(f(x)-f(1))}{x-1}=-f'(1)$

$f'(x)=5x^4-2x-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(1)=5-2-\dfrac{1}{3}=3-\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3}$

$-f'(1)=-\dfrac{8}{3}$ bulunur.

10. $f(x)=\begin{cases}(x^4-x^3).(x^2+1), & x<1\\ \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x^2}, & x=1\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt{x}, & x>1\end{cases}$

a) $f'(1^-)+f'(1^+)=?$

$1^-<1$ olduğundan, $f(x)=(x^4-x^3)(x^2+1)$

$f'(x)=\left[4x^3-3x^2\right].(x^2+1)+(x^4-x^3).[2x]$

$f'(1^-)=[4-3].(1+1)+(1-1).[2]$

$f'(1^-)=1.2-0$

$f'(1^-)=2$ olur.

$1^+>1$ olduğundan, $f(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}$

$f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(1^+)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{6}$ olur.

$f'(1^-)+f'(1^+)=2+\dfrac{5}{6}=\dfrac{17}{6}$

b) $f'(-1)=?$

$-1<1$ olduğundan, $f(x)=(x^4-x^3)(x^2+1)$

$f'(x)=\left[4x^3-3x^2\right].(x^2+1)+(x^4-x^3)[2x]$

$f'(-1)=[-4-3].(1+1)+(1-(-1))[2.(-1)]$

$f'(-1)=[-7].(2)+(2).[-2]$

$f'(-1)=-14-4$

$f'(-1)=-18$ bulunur.

c) $f'(1)=?$

$x=1$ kritik nokta olduğundan, bu noktada süreklilik, 1^- ve 1^+ türev incelenir.

$f'(1^-)=2$ ve $f'(1^+)=\dfrac{5}{6}$ olduğundan

$f'(1^-)\neq f'(1^+)$

O halde, $f'(1)$ yoktur.

d) $f'(2)=?$

$2>1$ olduğundan, $f(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}$

$f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(2)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ bulunur.

1. $f(x^2-2)=x^4-4x^2+1$

$\left[f(x^2-2)\right]'=(x^4-4x^2+1)'$

$f'(x^2-2)(x^2-2)'=4x^3-8x$

$f'(x^2-2)(2x)=4x^3-8x$

$f'(x^2-2)=\dfrac{4x^3-8x}{2x}$

$f'(x^2-2)=2x^2-4$

$x^2-2=2\rightarrow x^2=4\rightarrow x=\mp 2$

$f'(x^2-2)=2x^2-4$

$x=\mp 2 \rightarrow f'(2)=4$ tür.

$f(2)=16-16+1=1$ bulunur.

[Dereceler çift olduğu için sonuç değişmez.]

2. $f(x)=\begin{cases}(x^2-2x)^3 & , x<2\\ \sqrt[3]{(x^2-1)^2} & , x\geq 2\end{cases}$

$x=1<2 \rightarrow f(x)=(x^2-2x)^3$

$f'(x)=[(x^2-2x)^3]'$

$f'(x)=3(x^2-2x)^2.(2x-2) \rightarrow f'(1)=3(1^2-2^2)(2-2)=0$

$x=3\geq 2 \rightarrow f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}=(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$

$f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(x^2-1)}}\cdot(2x) \rightarrow f'(3)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(3^2-1)}}\cdot(2.3)=2$

$f'(1)+f'(3)=0+2=2$ bulunur.

3. $f(x)=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}=\sqrt[16]{x.x^2.x^4.x^8}=\sqrt[16]{x^{15}}=x^{\frac{15}{16}}$

$f'(x)=\dfrac{15}{16\sqrt[16]{x}}$

$f'\left(\dfrac{1}{4^{32}}\right)=\dfrac{15}{16\sqrt[16]{4^{-32}}}=\dfrac{15}{16.4^{-2}}=15$ bulunur.

4. $x^2=\sqrt{y}-x^3$

$\sqrt{y}=x^2+x^3$

$y=(x^2+x^3)^2$

$f(x)=y=(x^2+x^3)^2$

$f'(x)=[(x^2+x^3)^2]'$

$f'(x)=2.(x^2+x^3).(2x+3x^2)$

$f'(2)=2.(4+8).(4+12)$

$f'(2)=384$ bulunur.

5. $(f+g)'(1)=f'(1)+g'(1)$

$\left(f(x^2)\right)'=(x^3-x)'$

$f'(x^2)(x^2)'=3x^2-1$

$f'(x^2)(2x)=3x^2-1$

$f'(x^2)=\dfrac{3x^2-1}{2x}$

$x=1$ için $f'(1^2)=f'(1)=\dfrac{3.1^2-1}{2.1}=1$

$[g(x)]'=[(x^3-x)^2]'$

$g'(x)=2(x^3-x)(3x^2-1)$

$x=1$ için $g'(1)=2.(0).(2)=0$

$f'(1)+g'(1)=1+0=1$ bulunur.

6. $f'(x)=(x^2-x)'$

$f'(x)=2x-1$

$\left(g(x^2-1)\right)'=(x^3+1)'$

$g'(x^2-1)[2x]=3x^2$

$g'(x^2-1)=\dfrac{3}{2}x$

$x=-\sqrt{3}$ için $g'(2)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$x=-\sqrt{3}$ için $g(2)=(-\sqrt{3})^3+1$

$=-3\sqrt{3}+1$

$(fog)'(2)=f'\left(g(2)\right).g'(2)$

$=f'(-3\sqrt{3}+1).\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\left[2.(-3\sqrt{3}+1)-1\right].\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$=[-6\sqrt{3}+2-1].\left(\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$

$=(-6\sqrt{3}+1).\left(\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$

$=27-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ bulunur.

7. $f(x-2)=(2x+1).g(x-1)$

$\left(f(x-2)\right)'=[(2x+1).g(x-1)]'$

$f'(x-2).[1]=[2].g(x-1)+(2x+1).g'(x-1).[1]$

$f'(x-2)=2.g(x-1)+(2x+1).g'(x-1)$

$x=5 \rightarrow f'(3)=2.g(4)+(11).g'(4)$

$6=2.4+11.g'(4)$

$g'(4)=-\dfrac{2}{11}$ bulunur.

8. $(fogoh)(x)=f[(goh)(x)]=f[g(h(x))]$

$(fogoh)'(x)=f'[g[h(x)]].g'(h(x)).h'(x)$

$[f'(x)=2x,\ g'(x)=3x^2,\ h'(x)=4x^3]$

$(fogoh)'(1)=f'\left[g[h(1)]\right].g'[h(1)].h'(1)$

$[\ h'(1)=4.1^3=4,\ h(1)=1^4-1=0\ ]$

$(fogoh)'(1)=f'[g(0)].g'(0).4$

$[\ g'(0)=3.0^2=0,\ g(0)=0^3+1=1\ ]$

$(fogoh)'(1)=f'[1].0.4=0$ bulunur.

9. $f(2x-1)=g(x^3-x^2)$

$[f(2x-1)]'=[g(x^3-x^2)]'$

$f'(2x-1)(2x-1)'=g'(x^3-x^2).(x^3-x^2)'$

$f'(2x-1).[2]=g'(x^3-x^2).[3x^2-2x]$

$f'(2x-1)=g'(x^3-x^2)\cdot\dfrac{3x^2-2x}{2}$

x=2 için

$f'(3)=g'(4).4=2.4=8$ bulunur.

10. $h(x)=f(x^2-2x)$

$[h(x)]'=[f(x^2-2x)]'$

$h'(x)=f'(x^2-2x).[(x^2-2x)]'$

$h'(x)=f'(x^2-2x).[2x-2]$

$h'(3)=f'(3).[4]=4.4=16$ bulunur.

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=x^2-2x \rightarrow f'(x)=2x-2 \\ \qquad\qquad\qquad\ \rightarrow f'(3)=4 \end{array}\right]$$

Kavrama ~ 4

1. $f(x)=(\sin 3x)^3$

$f'(x)=3(\sin 3x)^2\cos 3x.3$

$f'(x)=9(\sin 3x)^2\cos 3x$

2. $f(x)=\tan(\cot x)$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$

$f'(x)=\frac{1}{\cos^2(\cot x)}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}$

$f'(x)=\frac{-1}{\sin^2 x.\cos^2(\cot x)}$

3. $f(x)=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

$f'(x)=\frac{(\sin x)(1+\cos x)-(1-\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}.\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right).\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$

4. $f(x)=\cos x.\sin^2 2x$

$f'(x)=-\sin x.\sin^2 2x+\cos x.2.\sin 2x.\cos 2x.2$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}.\sin^2\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{4}.2.\sin\frac{\pi}{2}.\cos\frac{\pi}{2}.2$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.1+\frac{\sqrt{2}}{2}.2.1.0.2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. $f(x)=\tan(\sqrt{\sin x})$

$f'(x)=\frac{1}{\cos^2(\sqrt{\sin x})}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x$

$f'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}.\cos^2(\sqrt{\sin x})}$

6. $f(x)=\arcsin[\cos(x^2)]$

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\cos(x^2)\right)^2}}\cdot(-\sin x^2).2x$

$f'(x)=\frac{-2x.\sin x^2}{\sqrt{1-\left(\cos(x^2)\right)^2}}$

7. $f(x)=\arccos(\sqrt{1-x^2})$

$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{1}{2.\sqrt{1-x^2}}\cdot -2x$

$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2}.\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{|x|.\sqrt{1-x^2}}$

8. $f(x)=\text{arccot}(\tan x)$

$f'(x)=\frac{-1}{1+\tan^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$

$f'(x)=\frac{-1}{\cos^2 x(1+\tan^2 x)}$

$f'(x)=\frac{-1}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{-1}{1}=-1=-1$

9. $f(x)=\frac{\arccos x}{\tan x}$

$f'(x)=\frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\tan x-\arccos x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x}$

10. $f(x)=\arcsin(\cos x.\sin x)$

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(\cos x.\sin x)^2}}\cdot(-\sin^2 x+\cos^2 x)$

$f'(x)=\frac{\cos 2x}{\sqrt{1-(\cos x.\sin x)^2}}$

1. $f(x)=\log_2\sqrt{x}+\ln x^2$

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\cdot\log_2 e+\dfrac{2x}{x^2}$

$f'(x)=\dfrac{1}{2x.\ln 2}+\dfrac{2}{x}$

2. $f(x)=3^{2x+1}+e^{\sin^2 x}$

$f'(x)=2.3^{2x+1}.\ln 3+2.\sin x.\cos x.\ e^{\sin^2 x}$

$f'(x)=3^{2x+1}.\ln 9+\sin 2x.\ e^{\sin^2 x}$

3. $f(x)=\ln[\log_2(x^3-1)]$

$f'(x)=\dfrac{\frac{3x^2}{x^3-1}\cdot\log_2 e}{\log_2(x^3-1)}$

4. $f(x)=\cos(e^{2x})-5^{\sqrt{x}}$

$f'(x)=-\sin(e^{2x}).e^{2x}.2-5^{\sqrt{x}}.\ln 5.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $f(x)=(2x)^e+2^x$

$f'(x)=e.(2x)^{e-1}.2+2^x.\ln 2$

6. $f(x)=\ln(2x)^{2x}$

$f(x)=2x.\ln(2x)$

$f'(x)=2\ln(2x)+2x\cdot\dfrac{2}{2x}$

$f'(x)=2(\ln(2x)+1)$

7. $f(x)=\log_2 5^{2x-1}+\ln(3x+1)$

$f(x)=(2x-1)\log_2 5+\ln(3x+1)$

$f'(x)=2\cdot\log_2 5+\dfrac{3}{3x+1}$

8. $f(x)=\ln x^{\sin x}$

$f(x)=\sin x.\ln x$

$f'(x)=\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}$

9. $f(x)=\log_3\left(\sin(\arccos x)\right)$

$f'(x)=\dfrac{\cos(\arccos x)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sin(\arccos x)}\cdot\log_3 e$

10. $f(x)=\cos(e^{2x})-\sin^2(\ln x)$

$f'(x)=-\sin(e^{2x}).e^{2x}.2-2\sin(\ln x).\cos(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}$

1. **I.** xy–15=0 $\rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$

II. siny–x^2=0 $\rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{-2x}{\cos y}=\frac{2x}{\cos y}$

III. 2xy–$(x^2-y^2)^2$=0 $\rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2y-2(x^2-y^2)(2x)}{2x-2(x^2-y^2)(-2y)}$

$=\frac{4x(x^2-y^2)-2y}{2x+4y(x^2-y^2)}$

IV. x^2-y^2–cos(x.y)=0 $\rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+\sin(xy).y}{-2y+\sin(xy).x}$

$=\frac{2x+\sin(xy).y}{2y-\sin(xy).x}$

2. y.sinx+x.$\cos^2$y=0

$\frac{dy}{dx}=-\frac{y\cos x+\cos^2 y}{\sin x-2x.\cos y.(-\sin y)}$

$=-\frac{y\cos x+\cos^2 y}{\sin x+x.\sin 2y}$

3. e(x+y)–πtan(x+y)=0

$\frac{dy}{dx}=-\frac{e-\pi(1+\tan^2(x+y))}{e-\pi(1+\tan^2(x+y))}$ =–1

4. F(x,y)=$\cos^2(\sqrt{x^3-y^2})$ fonksiyonunun yerine x ve y ye göre değişiklik gösteren x^3-y^2 ifadesinin türevinin alınması yeterlidir.

[F(x,y)=$\cos^2(\sqrt{x^3-y^2})$ yerine F(x,y)=x^3-y^2]

$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2}{-2y}=\frac{3x^2}{2y}$

5. $\sqrt{x}-\sqrt{y}-1=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{2\sqrt{y}}}=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{y}{x}}$$

6. $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-a=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}}{\frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}}=-\frac{\sqrt[3]{y}}{2\sqrt[3]{x^2}}$$

7. F(x,y)= $\sin\left(\arctan(x^2y)\right)$ = 0 fonksiyonunun yerine x ve y ye göre değişiklik gösteren x^2y ifadesinin türevinin alınması yeterlidir.

[F(x,y)= $\sin\left(\arctan(x^2y)\right)$ = 0 yerine F(x,y)=x^2y]

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy}{x^2}=-\frac{2y}{x}$

8. F(x,y)=$\ln\left(3^{x^2+y}\right)$=0

F(x,y)=(x^2+y).ln3=0

$F'(x,y)=-\frac{2x}{1}=-2x$

9. $x^y-y^x=0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{y.x^{y-1}-y^x.\ln y}{x^y.\ln x-x.y^{x-1}}=\frac{y^x.\ln y-y.x^{y-1}}{x^y.\ln x-x.y^{x-1}}$

10. $\ln\left(\frac{x^2-2x}{y^2+2y}\right)=0 \rightarrow \frac{x^2-2x}{y^2+2y}=1$

$x^2-2x=y^2+2y$

$x^2-2x-y^2-2y=0$

$F'(x,y)=-\frac{2x-2}{-2y-2}=\frac{2x-2}{2y+2}$

1. $f(x)=\begin{cases} x^2+\sqrt[3]{x} &, \quad x\le 1 \\ x^2-x+1 &, \quad 1<x\le 5 \\ 2^x+4x^2 &, \quad x>5 \end{cases}$

* $x=-2\le 1$ olduğundan, $f(x)=x^2+\sqrt[3]{x}$

$f'(x)=2x+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow f'(-2)=2.(-2)+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(-2)^2}}$

$=-4+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

* $x=3$ noktası $1<x\le 5$ aralığında olduğundan,
$f(x)=x^2-x+1 \rightarrow f'(x)=2x-1 \rightarrow f'(3)=5$

* $x=7>5$ olduğundan, $f(x)=2^x+4x^2$

$f'(x)=2^x.\ln 2+8x \rightarrow f'(7)=2^7.\ln 2+8.7$

$=128.\ln 2+56$

2. $f(x)=\begin{cases} \ln x^e &, \quad x>0 \\ \sqrt{x^2-x-1} &, \quad x\le 0 \end{cases}$

* $x=1>0$ olduğundan, $f(x)=\ln x^e=e\ln x$

$f'(x)=e\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{e}{x} \rightarrow f'(1)=\dfrac{e}{1}=e$

* $x=-1<0$ olduğundan, $f(x)=\sqrt{x^2-x-1}$

$f'(x)=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-1}} \rightarrow f'(-1)=\dfrac{2.(-1)-1}{2\sqrt{(-1)^2-(-1)-1}}$

$=-\dfrac{3}{2}$

3. f:R $\rightarrow$ R olmak üzere,

$f(x)=\begin{cases} 2x+2 &, \quad x<2 \\ mx+4 &, \quad x\ge 2 \end{cases}$

fonksiyonu tüm reel sayılarda sürekli olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ olur.

$\lim\limits_{x\to 2^+}(mx+4)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x+2)$

$m.2+4=2.2+2 \rightarrow m=1$

$x=2$ kritik nokta olduğundan $f'(2^-)=f'(2^+)$ olmalıdır.

$2^-<2$ olduğundan,

$f(x)=2x+2 \rightarrow f'(x)=2 \rightarrow f'(2^-)=2$

$2^+>2$ olduğundan,

$f(x)=mx+4=x+4= \rightarrow f'(x)=1 \rightarrow f'(2^+)=1$

$f'(2^-)\ne f'(2^+)$ olduğundan, f'(2) nin değeri yoktur.

4. $y=\begin{cases} \cot x &, \quad -\frac{\pi}{2}<x\le 0 \\ \tan x &, \quad 0\le x<\frac{\pi}{2} \end{cases}$

* $x=-\dfrac{\pi}{4}$ noktası $-\dfrac{\pi}{2}<x\le 0$ aralığında olduğundan, $f(x)=\cot x \rightarrow f'(x)=-(1+\cot^2 x)$

$f'(-\frac{\pi}{4})=-(1+\cot^2(-\frac{\pi}{4}))=-(1+1)=-2$

* $x=\dfrac{\pi}{4}$ noktası $0\le x<\dfrac{\pi}{2}$ aralığında olduğundan, $f(x)=\tan x \rightarrow f'(x)=1+\tan^2 x$

$1+\tan^2(\frac{\pi}{4}))=1+1=2$

$f'(-\frac{\pi}{4})+f'(\frac{\pi}{4})=-2+2=0$ bulunur.

5. $f(x)=\begin{cases} e^{2x} &, \quad x\le 1 \\ \ln\left(\dfrac{x^2-3}{2x-1}\right) &, \quad 1<x\le 3 \\ x^3-3x^2 &, \quad x>3 \end{cases}$

$x=2$ noktası $1<x\le 3$ aralığında olduğundan,

$f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-3}{2x-1}\right)=\ln(x^2-3)-\ln(2x-1)$

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-3}-\dfrac{2}{2x-1}$

$f'(2)=\dfrac{2.2}{2^2-3}-\dfrac{2}{2.2-1}=\dfrac{10}{3}$ bulunur.

6. * $x=-5<1$ olduğundan, $f(x)=x^2-1$ olur.

$f'(x)=2x \rightarrow f'(-5)=2.(-5)=-10$

* $x=\dfrac{5}{2}$ değeri $1<x\le 5$ aralığında olduğundan,

$f(x)=|x^2+4x-5|$ olur.

$x^2+4x-5=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+4\cdot\dfrac{5}{2}-5=\dfrac{25}{4}+10-5=\dfrac{45}{4}>0$

olduğundan, $f(x)=|x^2+4x-5|=x^2+4x-5$

$f'(x)=2x+4 \rightarrow f'(\frac{5}{2})=2.\frac{5}{2}+4=9$

* $x=\dfrac{11}{2}>5$ olduğundan, $f(x)=x^2+4x$

$f'(x)=2x+4 \rightarrow f'(\frac{11}{2})=2\cdot\frac{11}{2}+4=15$

$f'(-5)+f'(\frac{5}{2})+f'(\frac{11}{2})=-10+9+15=14$ bulunur.

7. $f(x) = |x^2+x|$

$x^2+x = 0 \rightarrow x(x+1) = 0$

$x = 0,\ x = -1$

$-\infty$		-1		0		$+\infty$
	$+$		$-$		$+$	

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x & , \quad x < -1 \\ -x^2-x & , \quad -1 < x < 0 \\ x^2+x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = -1,\ x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \quad x < -1 \\ -2x-1 & , \quad -1 < x < 0 \\ 2x+1 & , \quad x > 0 \\ \text{Yoktur} & , \quad x = -1,\ x = 0 \end{cases}$$

8. $f(x) = \ln|\sin x| - \ln|\cos x|$

$= \ln\left|\dfrac{\sin x}{\cos x}\right|$

$= \ln|\tan x|$

$x = \dfrac{5\pi}{4}$ noktası III. bölgede olduğundan,

$\tan x > 0$ ve $f(x) = \ln(\tan x)$ olur.

$f'(x) = \dfrac{1+\tan^2 x}{\tan x}$

$f'(\dfrac{5\pi}{4}) = \dfrac{1+\tan^2\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)}{\tan\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)}$

$= \dfrac{1+1^2}{1}$

$= 2$ bulunur.

9. $f(x) = \dfrac{|x^2-2x|}{x^2-4}$

$x = 1 \rightarrow x^2-2x = 1^2 - 2.1 = -1 < 0$ olduğundan,

$f(x) = \dfrac{|x^2-2x|}{x^2-4} = \dfrac{-(x^2-2x)}{x^2-4}$

$= \dfrac{-x(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$= \dfrac{-x}{x+2}$

$f'(x) = \dfrac{(-1).(x+2)-(-x).(1)}{(x+2)^2} = \dfrac{-2}{(x+2)^2}$

$f'(1) = \dfrac{-2}{(1+2)^2} = -\dfrac{2}{9}$ bulunur.

10. $f(x) = e^{|x^2-2x|} + |2x^2-3|$

$x = \dfrac{3}{2} \rightarrow x^2-2x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 2\cdot\dfrac{3}{2} = -\dfrac{3}{4} < 0$

$2x^2-3 = 2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 3 = \dfrac{3}{2} > 0$

olduğundan,

$f(x) = e^{|x^2-2x|} + |2x^2-3| = e^{-x^2+2x} + 2x^2-3$

$f'(x) = e^{-x^2+2x}.(-2x+2)+4x$

$f'(\dfrac{3}{2}) = e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\cdot\frac{3}{2}}.\left(-2\cdot\dfrac{3}{2}+2\right)+4.\dfrac{3}{2}$

$= e^{-\frac{9}{4}+3}.(-3+2)+2.3$

$= -e^{-\frac{3}{4}}+6$ bulunur.

1. $x=t^2+6t-1$
$y=t^3-6t+2$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3t^2-6}{2t+6}$$
$$t=2 \to \frac{dy}{dx}=\frac{3.2^2-6}{2.2+6}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

2. $x=\ln t$
$y=e^t-2$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{e^t}{\frac{1}{t}}=te^t$$

3. $x=2t^2+3$
$t=y-1$
$y=u^2+1$
$$\frac{dx}{du}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{dy}\cdot\frac{dy}{du}=(4t).(1).(2u)=8.t.u=8.1.1=8$$
$[\ u=1 \to y=1^2+1=2 \to t=y-1=2-1=1\ ]$

4. $x=a\cos^2 t$
$y=a\sin^2 t$
$$\frac{dx}{dy}=\frac{dx/dt}{dy/dt}=\frac{-2a\cos t\sin t}{2a\sin t\cos t}=-1$$

5. $x=t.\sin t$
$y=t+\cos t$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{1-\sin t}{\sin t+t\cos t}$$

6. $x=2^t+t-1$
$y=3^t-t+1$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3^t\ln 3-1}{2^t\ln 2+1}$$
$$t=0 \to \frac{dy}{dx}=\frac{3^0.\ln 3-1}{2^0.\ln 2+1}=\frac{\ln 3-1}{\ln 2+1}$$

7. $x=\sin t$
$y=\tan t$
$$\frac{dx}{dy}=\frac{dx/dt}{dy/dt}=\frac{\cos t}{\frac{1}{\cos^2 t}}=\cos^3 t$$
$$t=\frac{\pi}{4} \to \frac{dx}{dy}=\cos^3\frac{\pi}{4}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{2\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

8. $y=3x$
$x=2^t$
$t=4n$
$$\frac{dy}{dn}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{dn}=3.2^t.\ln 2.4=12.2^t.\ln 2$$
$$\frac{dy}{dn}==12.2^0.\ln 2=12.\ln 2\quad [\ n=0\to t=4n=4.0=0\ ]$$

9. $x=\sqrt[3]{t^2}$
$y=\sqrt{2t-1}$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{2}{2\sqrt{2t-1}}}{\frac{2t}{3\sqrt[3]{t^4}}}$$
$$t=1 \to \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{2}{2\sqrt{2.1-1}}}{\frac{2.1}{3\sqrt[3]{1^4}}}==\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$$

10. $x=\frac{t^5}{5}+\frac{t^6}{6}$
$y=\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{t^3-t^2}{t^4+t^5}$$
$$t=1 \to \frac{dy}{dx}=\frac{1^3-1^2}{1^4+1^5}=0=0$$

1. $f(x)=(x-2)^2+1 \rightarrow y=10 \rightarrow (x-2)^2+1=10$

$(x-2)^2=9 \rightarrow x-2=3 \rightarrow x=5$ $[\,x\in(2,+\infty)\,]$

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{2(x-2)}$$

$$(f^{-1})'(10)=\frac{1}{f'(5)}=\frac{1}{2(5-2)}=\frac{1}{6}$$

2. $f(x)=x^3-12 \rightarrow y=15 \rightarrow x^3-12=15 \rightarrow x^3=27 \rightarrow x=3$

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{3x^2}$$

$$(f^{-1})'(15)=\frac{1}{f'(3)}=\frac{1}{3.3^2}=\frac{1}{27}$$

3. $f(x)=\tan x \rightarrow y=1 \rightarrow 1=\tan x \rightarrow x=\frac{\pi}{4}$ $\left[\,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\cos^2 x$$

$$(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

4. $f(x)=2e^{\frac{2}{x}} \rightarrow y=2e \rightarrow 2e=2.\,e^{\frac{2}{x}} \rightarrow \frac{2}{x}=1 \rightarrow x=2$

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{2.e^{\frac{2}{x}}.(\frac{-2}{x^2})}$$

$$(f^{-1})'(2e)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{2.e^{\frac{2}{2}}.(\frac{-2}{2^2})}=\frac{1}{2.e.\frac{-2}{4}}=-\frac{1}{e}$$

5. $f(x)=\arctan 2x$

$y=\frac{\pi}{3}=\arctan 2x \rightarrow \tan\frac{\pi}{3}=2x \rightarrow \sqrt{3}=2x \rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\frac{2}{1+4x^2}}=\frac{1+4x^2}{2}$$

$$(f^{-1})'(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{1+4.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2}=\frac{1+3}{2}=2$$

6. $f(x)=\tan x \rightarrow (f^{-1})(x)=\arctan x$

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{1+x^2} \rightarrow (f^{-1})'(a)=\frac{1}{1+a^2}=\frac{1}{10}$$

$$\rightarrow 1+a^2=10 \rightarrow a^2=9$$

$$\rightarrow a=-3\in R^-$$

7. $f(x)=\log_3 x+4 \rightarrow y=4 \rightarrow 4=4\log_3 x \rightarrow x=1$

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x}\cdot\log_3 e}=x.\ln 3$$

$$(f^{-1})'(4)=\frac{1}{f'(1)}=1.\ln 3=\ln 3$$

8. $f(x)=\ln(3x+2)$

$f^{-1}(0)=a \rightarrow f(a)=0 \rightarrow \ln(3a+2)=0 \rightarrow 3a+2=1$

$3a=-1 \rightarrow a=f^{-1}(0)=-\frac{1}{3}$

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\frac{3}{3x+2}}=\frac{3x+2}{3}$$

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3.\left(-\frac{1}{3}\right)+2}{3}=\frac{-1+2}{3}=\frac{1}{3}$$

9. $f(x)=\sin x$ ve $g(x)=e^x \rightarrow (gof)(x)=e^{\sin x}$

$y=1=e^{\sin x} \rightarrow \sin x=0 \rightarrow x=0$

$$[(gof)^{-1}]'(y)=\frac{1}{(gof)'(x)}=\frac{1}{e^{\sin x}.\cos x}$$

$$[(gof)^{-1}]'(1)=\frac{1}{(gof)'(0)}=\frac{1}{e^{\sin 0}.\cos 0}=\frac{1}{e^0.1}=1$$

10. $f(x)=\sin 3x \rightarrow y=\frac{1}{2}=\sin 3x \rightarrow 3x=\frac{\pi}{6} \rightarrow x=\frac{\pi}{18}$

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{3.\cos 3x}$$

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{18}\right)}=\frac{1}{3.\cos\left(3.\frac{\pi}{18}\right)}$$

$$=\frac{1}{3.\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{3.\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

1. $f(x)=(\cos x)^x$

$f'(x)=(\cos x)^x(x.\ln(\cos x))'$

$=(\cos x)^x\left(\ln(\cos x)+x.\dfrac{-\sin x}{\cos x}\right)$

$=(\cos x)^x\left(\ln(\cos x)-x.\tan x\right)$

2. $f(x)=x^{(2^x)}$

$f'(x)=x^{(2^x)}.(2^x.\ln x)'$

$=x^{(2^x)}.\left(2^x.\ln 2.\ln x+2^x.\dfrac{1}{x}\right)$

$f'(1)=1^{(2^1)}.\left(2^1.\ln 2.\ln 1+2^1.\dfrac{1}{1}\right)=2$

3. $f(x)=x^{\ln x}$

$f'(x)=x^{\ln x}(\ln x.\ln x)'$

$=x^{\ln x}\left(\dfrac{1}{x}\ln x+\dfrac{1}{x}\ln x\right)$

$=x^{\ln x}\left(\dfrac{2}{x}\ln x\right)$

4. $f(x)=e^{2x}+(5^x)^x=e^{2x}+5^{(x^2)}$

$f'(x)=2.e^{2x}+5^{(x^2)}.\ln 5.2x$

5. $f(x)=(\sin x)^{\sin x}$

$f'(x)=(\sin x)^{\sin x}(\sin x.\ln(\sin x))'$

$=(\sin x)^{\sin x}\left(\cos x.\ln(\sin x)+\sin x.\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)$

$=(\sin x)^{\sin x}.\cos x.[\ln(\sin x)+1]$

6. $f(x)=(\ln x)^{(3^x)}+1$

$f'(x)=(\ln x)^{(3^x)}\left(3^x.\ln(\ln x)\right)'$

$=(\ln x)^{(3^x)}\left(3^x.\ln 3.\ln(\ln x)+3^x.\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)$

$=(\ln x)^{(3^x)}\left(3^x.\ln 3.\ln(\ln x)+3^x.\dfrac{1}{x.\ln x}\right)$

7. $f(x)=(x^3)^{x^2}$

$f'(x)=(x^3)^{x^2}(x^2\ln x^3)'$

$=(x^3)^{x^2}(3x^2\ln x)'=(x^3)^{x^2}(6x.\ln x+3x^2.\dfrac{1}{x})$

$=(x^3)^{x^2}(6x.\ln x+3x)$

$f'(1)=(1^3)^{1^2}(6.1.\ln 1+3.1)=3$

$g(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$g'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1}{x}.\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)'$

$=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}.\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x}.\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}.\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$g'(\dfrac{1}{e})=\left(\dfrac{1}{\frac{1}{e}}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{e}}}\left(-\dfrac{1}{\left(\frac{1}{e}\right)^2}.\ln\left(\dfrac{1}{\frac{1}{e}}\right)-\dfrac{1}{\left(\frac{1}{e}\right)^2}\right)$

$=(e)^e\left(-e^2.\ln(e)-e^2\right)$

$=e^e.(-2e^2)=-2e^{e+2}$

8. $f(x)=x^{\ln x^2}$

$f'(x)=x^{\ln x^2}(\ln x^2.\ln x)'$

$=x^{\ln x^2}(2(\ln x)^2)'$

$=x^{\ln x^2}.2.\left(2.\ln x.\dfrac{1}{x}\right)=4.x^{\ln x^2}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$

9. $f(x)=\arcsin\left(5x+(e^x)^x\right)=\arcsin\left(5x+e^{(x^2)}\right)$

$f'(x)=\dfrac{(5+e^{(x^2)}.2x)}{\sqrt{1-(5x+e^{(x^2)})^2}}$

10. $f(x)=x^x+\ln x^x=x^x+x.\ln x$

$f'(x)=x^x(x.\ln x)'+(x.\ln x)'$

$=x^x(\ln x+1)+(\ln x+1)=(\ln x+1)(x^x+1)$

1. $f(x)=x^4-x^3+x^2+1$

$f'(x)=4x^3-3x^2+2x$

$f''(x)=12x^2-6x+2$

$f'''(x)=24x-6$

$f'''(1)=24.1-6=18$

2. $f(x)=\sin x$

$f'(x)=\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

$f'''(x)=-\cos x$

$f^{(4)}(x)=\sin x$

.

.

.

$$\frac{d^{40}y}{dx^{40}}=f^{(40)}(x)=\sin x$$

[4. türevde tekrar başa döndüğünden Kuvvet(40) tekrarlama sayısına(4) bölünür kalana bakılır.

Kalan sıfır olduğundan $\frac{d^{40}y}{dx^{40}}=f^{(4)}(x)=\sin x$]

3. $f(x)=e^{3x}+1$

$f'(x)=3.e^{3x}$

$f''(x)=3^2.e^{3x}$

$f'''(x)=3^3.e^{3x}$

.

.

.

$f^{40}(x)=3^{40}.e^{3x}$

$f^{40}(1)=3^{40}.e^{3}$

4. $y=\frac{3}{2x-1}=f(x)=3.(2x-1)^{-1}$

$f'(x)=3.[-1.(2x-1)^{-2}.2]$

$f''(x)=3.[+1.2.(2x-1)^{-3}.2^2]$

$f'''(x)=3.[-1.2.3.(2x-1)^{-4}.2^3]$

$f^{(4)}(x)=3.[+1.2.3.4.(2x-1)^{-5}.2^4]$

.

.

.

$f^{(25)}(x)=3.[-25!.(2x-1)^{-26}.2^{25}]=-\frac{3.2^{25}.25!}{(2x-1)^{26}}$

$f^{(25)}(0)=-\frac{3.2^{25}.25!}{(2.0-1)^{26}}=-3.2^{25}.25!$

5. $f(x)=x^3-x^2.|x^2-5|$

$x=-2 \rightarrow x^2-5=-1<0 \rightarrow |x^2-5|=-x^2+5$

$f(x)=x^3-x^2.(-x^2+5)=x^3+x^4-5x^2$

$f'(x)=3x^2+4x^3-10x$

$f''(x)=6x+12x^2-10$

$f''(-2)=6.(-2)+12.(-2)^2-10=26$

6. $f(x)=\ln x$

$f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$

$f''(x)=(-1).x^{-2}$

$f'''(x)=(+1.2).x^{-3}$

$f^{(4)}(x)=(-1.2.3).x^{-4}$

.

.

.

$f^{(20)}(x)=-19!.x^{-20}$

7. f(x)=cos3x

$f'(x)=-\sin 3x.3$

$f''(x)=-\cos 3x.3^2$

$f'''(x)=\sin 3x.3^3$

$f^{(4)}(x)=\cos 3x.3^4$

.

.

.

$f^{10}(x)=-3^{10}.\cos 3x$

8. x=2cost

y=2sint

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{2\cos t}{-2\sin t}=-\cot t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(y')}{dx}=\frac{d(y')/dt}{dx/dt}$$

$$=\frac{(-\cot t)'}{-2\sin t}=\frac{1+\cot^2 t}{-2\sin t}=-\frac{1+\cot^2 t}{2\sin t}$$

9. $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{2t}{e^t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(y')}{dx}=\frac{d(y')/dt}{dx/dt}$$

$$=\frac{\left(\frac{2t}{e^t}\right)'}{e^t}=\frac{\frac{2.e^t-2t.e^t}{(e^t)^2}}{e^t}=\frac{2-2t}{(e^t)^2}=\frac{2(1-t)}{e^{2t}}$$

10. $F'(x,y)=\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{2x+3y}{2y+3x}$

$$F'(1,1)=-\frac{2.1+3.1}{2.1+3.1}=-1$$

$$F''(x,y)=\frac{d[F'(x,y)]}{dx}$$

$$=-\frac{(2+3y').(2y+3x)-(2x+3y).(2y'+3)}{(2y+3x)^2}$$

$$F''(1,1)=-\frac{(2+3.(-1)).(2.1+3.1)-(2.1+3.1).(2.(-1)+3)}{(2.1+3.1)^2}$$

$$=-\frac{(-1).(5)-(5).(1)}{(5)^2}=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$$

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}}=\lim\limits_{x\to 0}2\sqrt{1+\sqrt{x}}$

$=2\sqrt{1+\sqrt{0}}=2$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\cos 2x-\sin 4x}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{(-\sin 2x).2}{(-\sin 2x).2-(\cos 4x).4}$

$=\dfrac{\left(-\sin\dfrac{\pi}{2}\right).2}{\left(-\sin\dfrac{\pi}{2}\right).2-(\cos\pi).4}=\dfrac{(-1).2}{(-1).2-(-1).4}=-1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{\sin x}\right)=\infty-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4.\sin x-3x}{x.\sin x}\right)=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4\cos x-3}{1.\sin x+x.\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\sin x}=-\infty$ ve $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sin x}=+\infty$ olduğundan

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{\sin x}\right)$ değeri yoktur.

4. $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right).\tan x=0\cdot\infty$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-x}{\cot x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\dfrac{-1}{-(1+\cot^2 x)}=\dfrac{-1}{-1}=1$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^3+1}-x\right)=\infty-\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4-x^4-x}{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x}{x^3+1}\right)=0$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x^3}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{3x^3}\right)=0$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^x}{x.\ln x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x^x).(x.\ln x)'}{(x.\ln x)'}=\lim\limits_{x\to 1}[-x^x]$

$=-1$

8. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}=0^0\to$ y=$x^{\sin x}$→lny=sinx.lnx

$\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}(\sin x.\ln x)=0\cdot\infty$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{\cos x}{(\sin x)^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{(\sin x)^2}{x.\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)$

$=(-1.\dfrac{0}{1})=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\ln y=0\to\lim\limits_{x\to 0}y=e^0=1\to\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}=1$ bulunur.

9. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(e^{x.\frac{1}{x}})=\lim\limits_{x\to 0}(e)=e$

10. Q(x)=P(x)–(1–x) polinomu $(x-1)^2$ ile tam bölünür.

$Q(x)=x^2+2mx+n-1+x=x^2+(2m+1)x+(n-1)$

$Q'(x)=2x+(2m+1)$

Q(1)=0=1+2m+1+n–1=2m+n+1

$Q'(1)=0=2+2m+1=0\to m=-\dfrac{3}{2}$

$2m+n+1=0\to 2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+n+1=0\to n=2$

$m+n=\left(-\dfrac{3}{2}\right)+2=\dfrac{1}{2}$ bulunur.

1. f(x)=2x+xlnx

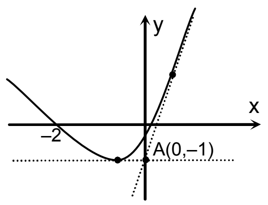
$f'(x)=2+\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=3+\ln x$

$x=1 \rightarrow y=f(1)=2.1+1.\ln 1=2 \rightarrow (1,2)$

$m_t=f'(1)=3+\ln 1=3$

d_t: $y-2=3.(x-1) \rightarrow y=3x-1$

2.



$f(x)=x^2+2x$

$f'(x)=2x+2$

Teğet noktası:$(x_0,y_0=(x_0)^2+2x_0)$

$$m_t=\frac{(x_0)^2+2x_0-(-1)}{x_0-0}=f'(x_0)=2x_0+2$$

$(x_0)^2+2x_0+1=2(x_0)^2+2x_0 \rightarrow (x_0)^2=1 \rightarrow x_0=\mp 1$

$x_0=1 \rightarrow y_0=1^2+2.1=3 \rightarrow (1,3)$

$x_0=-1 \rightarrow y_0=(-1)^2+2.(-1)=-1 \rightarrow (-1,-1)$

$(1,3) \rightarrow m_t=f'(1)=2.1+2=4$

dt_1: $y_1-3=4.(x-1) \rightarrow y_1=4x-1$

$(-1,-1) \rightarrow m_t=f'(-1)=2.(-1)+2=0$

dt_2: $y_2-(-1)=0.(x-(-1)) \rightarrow y_2=-1$

3. f(x)=sin3x–sinx

$f'(x)=3.\cos 3x-\cos x$

$$x=\frac{\pi}{2} \rightarrow y=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3.\cos\frac{3\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}=0 \rightarrow \left(\frac{\pi}{2},0\right)$$

$$m_t=f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=10 \rightarrow m_n=-\frac{1}{10} \quad [\ m_t.m_n=-1\ ]$$

$$\left[\begin{array}{l} f'(x)=3.\cos 3x-\cos x \\ f''(x)=-9.\sin 3x+\sin x \\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-9.\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{2}=-9.(-1)+1=10 \end{array}\right]$$

$$d_n: y-0=\left(-\frac{1}{10}\right).\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow y=-\frac{x}{10}+\frac{\pi}{20}$$

4. $f(x)=\frac{x^3}{3}$ eğrisine d:x–y+k=0 doğrusu x_0 noktasında teğet ise $f'(x_0)=m_d=1 \rightarrow (x_0)^2=1 \rightarrow x_0=\mp 1$

$$x_0=1 \rightarrow y_0=\frac{1^3}{3}=\frac{1}{3} \rightarrow \left(1,\frac{1}{3}\right)$$

$$x_0=-1 \rightarrow y_0=\frac{(-1)^3}{3}=-\frac{1}{3} \rightarrow \left(-1,-\frac{1}{3}\right)$$

noktaları x–y+k=0 doğrusu üzerinde olduğundan denklemi sağlar.

$$\left(1,\frac{1}{3}\right) \rightarrow 1-\frac{1}{3}+k=0 \rightarrow k_1=-\frac{2}{3}$$

$$\left(-1,-\frac{1}{3}\right) \rightarrow -1-\left(-\frac{1}{3}\right)+k=0 \rightarrow k_2=\frac{2}{3}$$

$k_1+k_2=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$ bulunur.

5. $f(x)=x^3-3x+2$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki teğeti d:9x–y+5=0 doğrusuna paralel ise,

$f'(x_0)=m_d=9 \rightarrow 3(x_0)^2-3=9 \rightarrow x_0=\mp 2$

$x_0=2 \rightarrow y=f(2)=2^3-3.2+2=4$

$x_0=-2 \rightarrow y=f(-2)=(-2)^3-3.(-2)+2=0$

Buradan (2,4) ve (–2,0) noktaları bulunur.

6. $f(x)=kx^3+\sqrt{3}\,x+1$

x=2 noktasındaki teğeti x ekseni ile pozitif yönde 60° lik açı yapıyorsa m=tan60=f′(2) olur.

$\tan 60=\sqrt{3}$ ve $f'(x)=3kx^2+\sqrt{3} \rightarrow f'(2)=3.k.2^2+\sqrt{3}$

$m=\sqrt{3}=3.k.2^2+\sqrt{3} \rightarrow k=0$ bulunur.

7. $f(2)=g(2)=1$, d_g: $y-0=1.(x-1)$

$g(x)=y=x-1 \rightarrow m_g=1=f'(2)$

$h(x)=f(x).g(x)+x^2$

$x=2 \rightarrow y=h(2)=f(2).g(2)+2^2=1.1+4=5 \rightarrow (2,5)$

$m_t=h'(2) \rightarrow m_n=-\dfrac{1}{h'(2)}$

$h'(x)=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)+2x$

$h'(2)=f'(2).g(2)+f(2).g'(2)+2.2=1.1+1.1+4=6$

$(2,5)$ ve $m_n=-\dfrac{1}{6}$ ise

d_n: $y-5=\left(-\dfrac{1}{6}\right)(x-2)$ bulunur.

8. $f(2)=3$

$f'(2)=m_d=\dfrac{3}{5}$

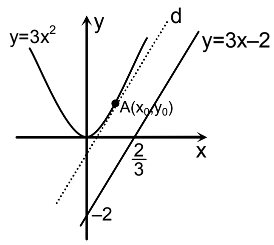
$g(x)=x^3.f(x)$

$g'(x)=3x^2.f(x)+x^3.f'(x)$

$g'(2)=3.2^2.f(2)+2^3.f'(2)$

$=12.3+8\cdot\dfrac{3}{5}=36+\dfrac{24}{5}=\dfrac{204}{5}$ bulunur.

9.



$y=f(x)=3x^2 \rightarrow f'(x)=6x$

En yakın noktası (x_0,y_0) ise

$f'(x_0)=m_d=3 \rightarrow 6x_0=3 \rightarrow x_0=\dfrac{1}{2}$ olur.

$x_0=\dfrac{1}{2} \rightarrow y=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4} \rightarrow \left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)$ noktası

$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)$ noktasının $3x-y-2=0$ doğrusuna uzaklığı

ise $\dfrac{\left|3.\dfrac{1}{2}-1.\dfrac{3}{4}-2\right|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{\dfrac{5}{4}}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{8}$ bulunur.

10. $s(t)=-20t^2+800t$

a. $s(2)=-20.2^2+800.2=1520$ m

b. $v(t)=s'(t)=-40.t+800$

$v(2)=s'(2)=-40.2+800=720$ m/sn

c. $a(t)=v'(t)=-40$

$a(3)=v'(3)=-40 m/sn^2$

d. $v(t)=0$ olmalıdır.

$-40.t+800=0 \rightarrow t=20$ sn

1. $\forall x \in (m,n)$ için

$f(x)<0,\ f'(x)>0$ [f(x) artan]

I. $\left(-\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{\overset{+}{f'(x)}}{\underset{+}{f^2(x)}} > 0$ artan

II. $\left(-f^4(x)\right)' = -4.\underset{-}{f^3(x)}.\underset{+}{f'(x)} > 0$ artan

III. $\left(f^4(x)\right)' = -4.\underset{-}{f^3(x)}.\underset{+}{f'(x)} < 0$ azalan

IV. $\left(f^3(x)\right)' = 3.\underset{+}{f^2(x)}.\underset{+}{f'(x)} > 0$ artan

V. $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{\overset{+}{f'(x)}.\overset{+}{x}-\overset{-}{f(x)}.1}{\underset{+}{x^2}} > 0$ artan

2. f(x)=1+sinx+cosx

f′(x)=cosx–sinx>0

cosx>sinx

$0<x<\frac{\pi}{4}$ iken cosx>sinx olduğundan bu aralıkta artandır.

3. $f'(x)=(x-2)^2(x-1).x<0$ iken f(x) azalandır.

$(x-2)^2(x-1).x<0$

–∞		x=0		x=1		x=2 (Çift Kat Kök)		+∞
	+		–		+		+	

(0,1) aralığında azalandır.

4. $f(x)=x^3-kx^2+3x-1$

$f'(x)=3x^2-2kx+3>0$ olması için $\Delta<0$ olmalıdır.

$\Delta=(-2k)^2-4.3.3<0$

$4k^2-36<0 \rightarrow k^2<9 \rightarrow -3<k<3$ bulunur.

5. $f(x)=\frac{(m-3)}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2-x-\frac{1}{2}$

fonksiyonunun teğetlerinin eğim açısı geniş açı ise fonksiyon azalandır.

$f'(x)=(m-3)x^2-mx-1<0$ olması için

$m-3<0$ ve $\Delta<0$ olmalıdır.

$m<3$ ve $m^2-4(m-3).(-1)<0$

$m^2+4m-12<0 \rightarrow m=-6,\ m=2$

–∞		m=–6		m=2		+∞
	+		–		+	

$-6<m<2$ bulunur.

[m<3 ve $-6<m<2$ koşulunu sağlayan bölge yine $-6<m<2$ olur.]

6. $(-\infty,-2)$ aralığında f(x) artan ve f′(x)>0 dır.

(–2,2) aralığında f(x) azalan ve f′(x)<0 dır.

$(2,+\infty)$ aralığında f(x) artan ve f′(x)>0 dır.

f′(–2)=0 [x=–2 de yerel maksimum vardır.]

f′(2)=0 [x=2 de yerel minimum vardır.]

I. $\underset{+}{f'(-4)} > \underset{-}{f'(1)}$ doğrudur.

II. $\underset{-}{f'\left(\frac{3}{2}\right)} < \underset{0}{f'(2)}$ doğrudur.

III. $\underset{-}{f'(0)} < \underset{+}{f'(-5)}$ doğrudur.

IV. $\underset{0}{f(1)} < \underset{-}{f'(1)}$ yanlıştır.

V. $\underset{-}{f(-5)} < \underset{+}{f'(-5)}$ doğrudur.

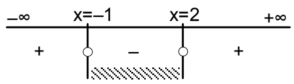
7. $f(x)=\dfrac{ax+4}{x-1}$ fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon ise f′(x)≥0 olmalıdır.

$\dfrac{a.(x-1)-(ax+4)}{(x-1)^2}\geq 0$

$\dfrac{-a-4}{(x-1)^2}\geq 0 \rightarrow -a-4\geq 0 \rightarrow a\leq -4$ bulunur.

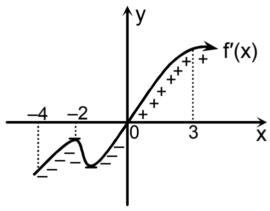
8. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x+1$

$f'(x)=x^2-x-2<0 \rightarrow x=-1,\ x=2$



$-1<x<2$ bulunur.

9.



$(-\infty,0)$ aralığında f′(x)<0 ve f(x) azalan

$(0,+\infty)$ aralığında f′(x)>0 ve f(x) artan

f′(0)=0, x=0 noktasında yerel minimum vardır.

I. $\underset{-}{f'(-2)}>\underset{0}{f'(0)}$ yanlıştır.

II. $f(-1)<f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ yanlıştır.

[($-\infty,0$) aralığında azalan]

III. f(1)<f(2) doğrudur.

[($0,+\infty$) aralığında artan]

IV. “(0,3] aralığında artandır.” doğrudur.

V. “[–4,0) aralığında azalandır.” doğrudur.

10. $\forall x\in[1,5]$ için f′(x)<0 ise f(x) fonksiyonu azalandır.

x=1 için f(1) en büyük,

x=5 için f(5) en küçük olur.

O halde, f(2)>f(5) kesinlikle doğrudur.

1. a. $f(x)=x^3-6x$

$f'(x)=3x^2-6$

$f''(x)=6x=0$

$x=0$

$-$ $+$

$\cap$ $\cup$

dönüm noktasıdır.

b. $f(x)=(x-1)^4$

$f'(x)=4.(x-1)^3$

$f''(x)=12(x-1)^2=0$

$x=1$ (Çift kat kök)

$+$ $+$

$\cup$ $\cup$

dönüm noktası yoktur.

c. $f(x)=x^4+8x^3$

$f'(x)=4x^3+24x^2$

$f''(x)=12x^2+48x=0$

$x^2+4x=0$

$x=-4$ $x=0$

$+$ $-$ $+$

$\cup$ $\cap$ $\cup$

$x=-4$ ve $x=0$ dönüm noktalarıdır.

d. $f(x)=x.(x-1)^3$

$f'(x)=(x-1)^3+x.3.(x-1)^2.1$

$f''(x)=3(x-1)^2+3.(x-1)^2+3x.2.(x-1)$

$f''(x)=6(x-1)^2+6x(x-1)=0$

$6(x-1)[x-1+x]=0$

$(x-1).[2x-1]=0$

$x=\frac{1}{2}$ $x=1$

$+$ $-$ $+$

$\cup$ $\cap$ $\cup$

$x=\frac{1}{2}$ ve $x=1$ de dönüm noktası vardır.

e. $f(x)=6-3x^2$

$f'(x)=-6x$

$f''(x)=-6<0$ sürekli konkav olduğundan dönüm noktası yoktur.

2. a. $f(x)=x^2+4x+3$

$f'(x)=2x+4$

$f''(x)=2>0$ olduğundan tanım aralığında konvekstir.

b. $f(x)=-x^4+4$

$f'(x)=-4x^3$

$f''(x)=-12x^2<0$ olur. Tanım aralığında konkavdır.

c. $f(x)=3^{-x}$

$f'(x)=3^{-x}$

$f''(x)=(3^{-x}\ln3.(-1))(\ln3.(-1))=3^{-x}(\ln3)^2>0$ olur. Tanım aralığında konvekstir.

d. $f(x)=\ln x$

$f'(x)=\frac{1}{x}$

$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ olduğundan tanım aralığında konkavdır.

e. $f(x)=\sin x$

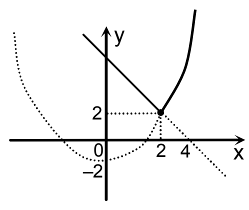
$f'(x)=\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

$(-\pi,0)$ aralığında $f''(x)>0$ olduğundan konvekstir.

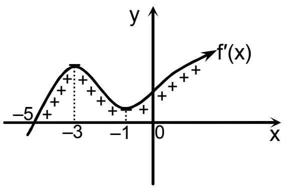
$(0,\pi)$ aralığında $f''(x)<0$ olduğundan konkavdır.

3.



Yerel minimum noktası (2,2) dir. Bu nokta $x-y+k+1=0$ doğrusu üzerinde ise $2-2+k+1=0 \rightarrow k=-1$ bulunur.

4.



$(-\infty,-5)$ aralığında f(x) azalan

$(-5,+\infty)$ aralığında f(x) artan

$f''(-3)=0$, $x=-3$ dönüm noktası

$f''(-1)=0$, $x=-1$ dönüm noktasıdır.

I. "(–5,0) aralığında sürekli artandır." doğrudur.

II. "$-5<x<-3$ aralığında $f'(x)$ artan olduğundan $f''(x)>0$ ve konveks olur." doğrudur.

III. "$-3<x<-1$ aralığında $f'(x)$ azalan olduğundan $f''(x)<0$ ve konkav olur." doğrudur.

IV. "$x=-3$ te dönüm noktası vardır." doğrudur.

V. "$x=-3$ ve $x=-1$ de dönüm noktası olduğundan $-3<x<-1$ aralığında dönüm noktası yoktur." yanlıştır.

5. $f(x)=-x^2+4x+m \rightarrow f'(x)=-2x+4=0 \rightarrow x=2$ olur.
$x=2$ için $y=-1$ mutlak maksimum değeri olduğundan $-1=-2^2+4.2+m \rightarrow -1=4+m \rightarrow m=-5$ bulunur.

6. $f(x)=-x^4+x^3+(m-2)x^2+3$

$f'(x)=-4x^3+3x^2+2(m-2)x$

$f''(x)=-12x^2+6x+2(m-2)<0$

$-6x^2+3x+(m-2)<0$

$\Delta<0 \rightarrow 3^2-4.(-6).(m-2)<0$

$9+24m-48<0$

$m<\frac{39}{24} \rightarrow m<\frac{13}{8}$ bulunur.

7. $f(x)=x^3-ax^2+bx-2$

$x=-1$ de bükeylik yön değiştirdiği için $f''(-1)=0$ olur.

$x=-1$ de teğetinin eğim açısı 45° olduğundan, $f'(-1)=\tan 45=1$ dir.

$f'(x)=3x^2-2ax+b$, $f''(x)=6x-2a$

$f'(-1)=3.(-1)^2-2a(-1)+b=1$

$3+2a+b=1 \rightarrow 2a+b=-2$

$f''(-1)=6.(-1)-2a=0 \rightarrow 2a=-6 \rightarrow a=-3$

$2a+b=-2 \rightarrow 2.(-3)+b=-2 \rightarrow b=4$ olur.

$a+b=-3+4=1$ bulunur.

8. x=a da mutlak minimum

x=c de yerel maksimum

x=f de yerel minimum

x=h de mutlak maksimum vardır.

(a,d) aralığında konkav $(\cap)$

(d,h) aralığında ise konvekstir. $(\cup)$

9. $f(x)=ax^3-2ax^2+x+1$

$f'(x)=3ax^2-4ax+1$ fonksiyonunun maksimum değeri 5 olduğundan

$[\ f''(x)=6ax-4a=0 \rightarrow x=\frac{2}{3}\ ]$

$x=\frac{2}{3}$ için y=5 olur.

$5=a.\left(\frac{2}{3}\right)^3-2a\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)+1$

$\frac{10}{3}=\frac{8a}{27}-\frac{8a}{9} \rightarrow \frac{90}{27}=\frac{8a-24a}{27}$

$90=-16a \rightarrow a=-\frac{90}{16} \rightarrow a=-\frac{45}{8}$ bulunur.

10. $f(x)=x^3-mx^2+nx-3$

$f'(x)=3x^2-2mx+n$

$f'(-1)=3.(-1)^2-2m(-1)+n=0 \rightarrow 2m+n=-3$

$f'(5)=3.5^2-2m.5+n=0 \rightarrow -10m+n=-75$

$2m+n=-3$ (I)

$-10m+n=-75$ (II)

(I) ve (II) denklemleri

çözüldüğünde m=6 ve n=–15 olur.

$m+n=6+(-15)=-9$ bulunur.

1. $f(x)=x^3+x^2-5x+2$

$f'(x)=3x^2+2x-5=0$

$3x \quad +5 \rightarrow x=-\frac{5}{3} \notin (-1,2)$

$x \quad -1 \rightarrow x=1 \in (-1,2)$

$x=-1$ için $f(-1)=-1-1+5+2=5$

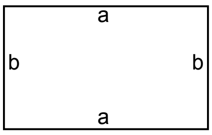
$x=1$ için $f(1)=1^3+1^2-5.1+2=-1$

$x=2$ için $f(2)=8-4-10+2=-4$

minimum değeri: -4

maksimum değeri: 5 bulunur.

2.



$2a+b=60 \rightarrow b=60-2a$

$A=a.b=a.(60-2a)=60a-2a^2$

$A'=60-4a=0 \rightarrow a=15$

$b=60-2.15=30$

$A=a.b=15.30=450\ cm^2$ bulunur.

3. $x^2-(1-m)x-m=0$

$T=(x_1)^2+(x_2)^2=(x_1+x_2)^2-2x_1.x_2$

$=(1-m)^2-2.(-m)$

$=1-2m+m^2+2m=m^2+1$

$T'=2m=0 \rightarrow m=0$ bulunur.

4. $f(x)=x(x+2)=x^2+2x$

$A(x_0,y_0)=A(x_0, (x_0)^2+2x_0)$

$T=x_0+y_0=x_0+(x_0)^2+2x_0$

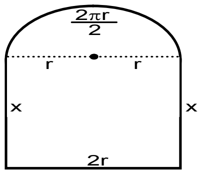
$T=(x_0)^2+3x_0$

$T'=2x_0+3=0 \rightarrow x_0=-\frac{3}{2}$

$y_0=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+2.\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}-3=-\frac{3}{4}$

$A\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{4}\right)$ bulunur.

5.



Çevre$=\frac{2\pi r}{2}+2x+2r=8$

$2x=8-2r-\pi r$

Alan$=A=\frac{\pi r^2}{2}+x.2r$

$A=\frac{\pi r^2}{2}+(8-2r-\pi r).r$

$A=\frac{\pi r^2}{2}+8r-2r^2-\pi r^2$

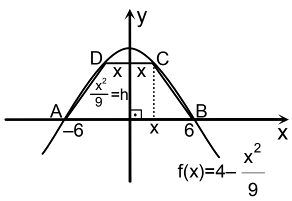
$A'=\pi r+8-4r-2\pi r$

$A'=8-4r-\pi r=0$

$8-r(4+\pi)=0 \rightarrow r=\frac{8}{4+\pi}$

Uzun kenar: $2r=\frac{16}{4+\pi}$ bulunur.

6.



Alan$=A=\frac{(2x+12).h}{2}$

$A=(x+6).\left(4-\frac{x^2}{9}\right)$

$A'=1.\left(4-\frac{x^2}{9}\right)+(x+6).\left(-\frac{2x}{9}\right)$

$A'=4-\frac{x^2}{9}-\frac{2x^2}{9}-\frac{12x}{9}$

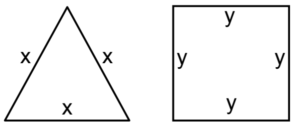
$A'=4-\frac{x^2}{3}-\frac{4x}{3}=0$

$12-x^2-4x=0 \rightarrow x^2+4x-12=0 \rightarrow x=-6,\ x=2$

uzunluk negatif olmayacağından $x=2$ olur.

$h=4-\frac{x^2}{9}=4-\frac{4}{9}=\frac{32}{9}$ br bulunur.

7.



$3x+4y=12$ cm$\rightarrow y=\dfrac{12-3x}{4}$

Alan=A=$\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}+y^2$

A=$\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}+\left(\dfrac{12-3x}{4}\right)^2$

A′=$\dfrac{x\sqrt{3}}{2}+2\cdot\left(\dfrac{12-3x}{4}\right).\left(-\dfrac{3}{4}\right)$

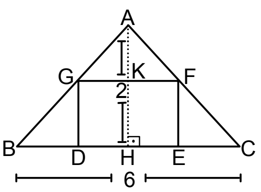
A′=$\dfrac{x\sqrt{3}}{2}-\dfrac{36-9x}{8}=0$

$4x\sqrt{3}-36+9x=0$

$x(4\sqrt{3}+9)=36$

$x=\dfrac{36}{4\sqrt{3}+9}$ cm olmalıdır.

8.



DEFG dikdörtgeninin alanı en çok ABC üçgeninin alanının yarısı kadar olabilir. O halde,

A(DEFG)=$\dfrac{A(ABC)}{2}=\dfrac{\left[\dfrac{2.6}{2}\right]}{2}=3$ br^2 bulunur.

9. $f(0)=f(1)$

$-1=1+(m-1)-1\rightarrow m=0$

$f(x)=x^2+(0-1)x-1=x^2-x-1$

$f'(x)=2x-1=0\rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ olur.

$x=\dfrac{1}{2}\rightarrow y=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{5}{4}$

$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{4}\right)$ noktası Rolle teoremine uyan noktadır.

10. $f(x)=x^2(x-2)=x^3-2x^2$

$f'(x)=3x^2-4x$

$f'(x)=3x^2-4x=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}$ [$f(2)=0$ ve $f(0)=0$]

$3x^2-4x=\dfrac{0-0}{2}=0$

$x(3x-4)=0$

$x=0\notin(0,2)$

$x=\dfrac{4}{3}\in(0,2)$ olduğundan ortalama değer teoremini sağlayan $x_0=\dfrac{4}{3}$ bulunur.

1. f(x)= $\sin x + \frac{\sin x}{\cos x} - 1$

cosx=0→x= $\frac{\pi}{2} + k\pi$ düşey asimptotları bulunur.

2. $y = x^2 + \frac{3}{x+1}$

x+1=0→x=–1 düşey asimptot

y=x^2 eğri asimptot olur.

3. f(x)= $3x - m + \frac{x-1}{x-2m}$

f(x)= $3x - m + 1 + \frac{2m-1}{x-2m}$

f(x)= $(3x+1-m) + \frac{2m-1}{x-2m}$

y=3x+1–m=3x+5→1–m=5 → m=–4

x–2m=0→x=2m=2.(–4)=–8 düşey asimptot

4. $f(x) = 2^{\frac{3x+1}{x-1}} + 3^{\frac{2}{x}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left[2^{\frac{3x+1}{x-1}} + 3^{\frac{2}{x}} \right] = 2^3 + 3^0$ =8+1=9 bulunur.

5. $f(x) = \frac{\ln(2x+10)}{x^2+4}$

x^2+4=0→$x^2 \neq -4$

ln(2x+10) ifadesi 2x+10=0→x=–5 için tanımsızdır.

O halde düşey asimptotu: x=–5 olur.

6. $y = \frac{mx+n}{x+m}$

x+m=0→x=–m düşey asimptot

$\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{mx+n}{x+m} \right] = m$ →y=m yatay asimptot

(–m,m) noktası y=3x+4 doğrusu üzerinde ise m=3.(–m)+4 → 4m=4→m=1 bulunur.

7. $f(x) = \sqrt{x^2+4x+3} + 2x - 1$

$y = \sqrt{1}.\left| x + \frac{4}{2.1} \right| + 2x - 1$

$y = |x+2| + 2x - 1$

y_1=x+2+2x–1=3x+1

y_2=–x–2+2x–1=x–3 bulunur.

8. $y = 3^{\sqrt{\frac{4x+3}{x-4}}}$

x–4=0→x=4 düşey asimptot

$\lim\limits_{x\to\infty} \left[3^{\sqrt{\frac{4x+3}{x-4}}} \right] = 3^{\sqrt{4}} = 9$ → y=9 yatay asimptot

Kesiştiği nokta (4,9) noktası olur. Koordinatları toplamı 4+9=13 bulunur.

9. f(x)=sinx.e^{-x}+mx+n–1

f(x)=(mx+n–1) + $\frac{\sin x}{e^x}$ ise

eğik asimptotu y=mx+n–1 olur.

y=mx+n–1=–2x+3

mx=–2x→m=–2 ve n–1=3→n=4

m+n=–2+4=2 bulunur.

10. $f(x) = \frac{ax+5}{2x-b}$ fonksiyonunun grafiğinin simetrik olduğu nokta düşey ve yatay asimptotlarının kesim noktasıdır.

2x–b=0→ $x = \frac{b}{2}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{ax+5}{2x-b} \right] = \frac{a}{2} \to y = \frac{a}{2}$

$\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2} \right) = (1{,}6) \to \frac{b}{2} = 1$→b=2 ve $\frac{a}{2} = 6$ →a=12

a.b=12.2=24 bulunur.

1. $f(x)=a.(x+2).(x-1)(x-2)$

$x=0$ için $y=-2$ olduğundan

$-2=a.(2)(-1)(-2)$

$a=-\frac{1}{2}$ olur.

$f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)(x-1)(x-2)$ bulunur.

2. **I.** $(-\infty,-1)$ aralığında $f(x)$ artan

$(-1,2)$ aralığında $f(x)$ azalan

$(2,+\infty)$ aralığında $f(x)$ artan

II. $x=-1$ de yerel maksimum

$x=2$ de ise yerel minimum vardır.

III. $(-\infty,p)$ aralığında $f(x)$ konkavdır. ($\cap$)

$(p,+\infty)$ aralığında $f(x)$ konvekstir. ($\cup$)

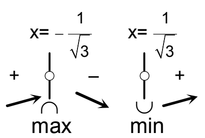
3. $f(x)=x^3-x$

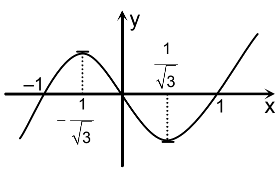
1. Tanım kümesi: R

2. $x=0\rightarrow y=0$ ve $y=0\rightarrow 0=x(x^2-1)$

$x=0,\ x=-1$ ve $x=1$

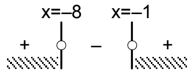
3. $f'(x)=3x^2-1=0\rightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ve $x=+\frac{1}{\sqrt{3}}$





4. $f(x)=\log\frac{x+8}{x+1}$

1. $\frac{x+8}{x+1}>0$



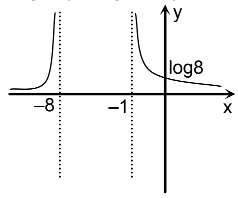
Tanım kümesi:R–[–8,–1]

2. $x+8=0\rightarrow x=-8$

$x+1=0\rightarrow x=-1$ de düşey asimptot vardır.

$\lim_{x\to\infty}\log\frac{x+8}{x+1}=\log 1=0\rightarrow y=0$ da yatay asimptot vardır.

3. $x=0$ için $y=\log 8$, $y=0$ x tanımsızdır.



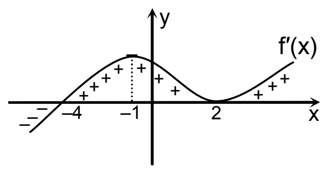
5. $f(1)=2$, $f'(1)=m_t=\frac{2}{2}=1$

$g(2x)=x.f(x)\rightarrow g'(2x).2=1.f(x)+x.f'(x)$

$x=1\rightarrow g'(2).2=f(1)+1.f'(1)$

$g'(2)=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$ bulunur.

6.



I. $(-\infty,-4)$ aralığında $f'(x)<0$ olduğundan $f(x)$ azalandır.

$(-4,2)\cup(2,+\infty)$ aralığında $f'(x)>0$ olduğundan $f(x)$ artandır.

II. $x=-4$ te yerel minimum vardır.

$x=2$ de işaret değişmediğinden ekstremum nokta değildir.

III. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ aralığında $f'(x)$ artan olduğundan $f''(x)>0$, konvekstir. ($\cup$)

$(-1,2)$ aralığında $f'(x)$ azalan olduğundan $f''(x)<0$, konkavdır. ($\cap$)

7. **I.** $(-\infty,-3)\cup(1,3)$ aralığında f(x) artan olduğundan I. madde doğrudur.

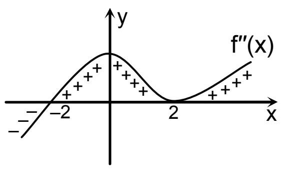
II. x=–3 te yerel maksimum vardır. (Artarken azalmaya geçtiğinden) Doğrudur.

III. x=3 için f(3)=5 fonksiyonunun alabileceği en büyük değer olduğundan mutlak maksimum değeri 5 tir. Doğrudur.

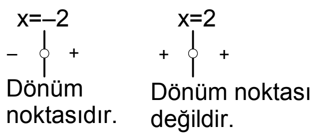
IV. $\underset{\substack{+\\(\text{Artan})}}{f'\left(\frac{5}{2}\right)} < \underset{\substack{-\\(\text{Azalan})}}{f'\left(\frac{7}{2}\right)}$ Yanlıştır.

V. $\underset{\substack{+\\(\text{Artan})}}{f'\left(\frac{3}{2}\right)} < \underset{-}{f\left(\frac{3}{2}\right)}$ Yanlıştır.

8.



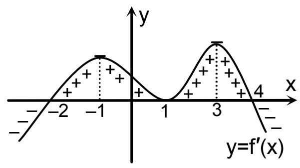
I.

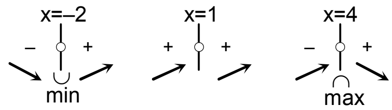


II. $(-\infty,-2)$ aralığında f″(x)<0 olduğundan f(x) konkavdır.($\cap$)

$(-2,2)\cup(2,+\infty)$ aralığında f″(x)>0 olduğundan f(x) konvekstir.($\cup$)

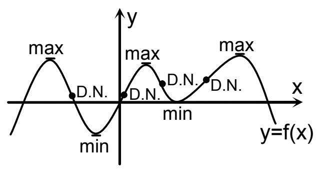
9.





x=–2 ve x=4 noktaları ekstremum noktalarıdır.

10.



f(x) fonksiyonunun 5 tane ekstremum noktası, 4 tane de dönüm noktası vardır.