2.I. MATRİSLER ve TEMEL İŞLEMLER

Tanım 2.1. Matris.

Aşağıdaki gibi satırlar ve sütunlar biçiminde sıralanmış reel sayı tablolarına matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}.....a_{1m} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}.....a_{2m} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}.....a_{3m} \\ ..... \\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}.....a_{nm} \end{bmatrix}$$

A matrisinin n satırı ve m sütunu vardır, bu nedenle A "n'ye m" bir matristir ya da (n x m) mertebesindendir denir. Burada $a_{ij} \in R$, matrisin i^{nci} satırında ve j^{inci} sütununda yer alan elemanıdır. Matrisler genellikle büyük harflerle A = $[a_{ij}]$ (n x m), B = $[b_{ij}]$ (p x q) biçiminde gösterilir.

Örnek 2.1.

i. $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 7 \\ 8 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ matrisi (3 x 3) yani üçe-üç bir matristir. Üç satırı ve üç sütunu vardır. A'nın birinci satır birinci sütununda bulunan elemanı, yani a_{11}, 2'dir. Öte yandan A'nın üçüncü satır ikinci sütunundaki elemanı, yani a_{32}, 5'tir. Bütün elemanlarını yazarsak, $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 0$; $a_{21} = 1$, $a_{22} = -1$, $a_{23} = 7$; $a_{31} = 8$, $a_{32} = 5$, $a_{33} = 6$ dır.

ii. $B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi (2 x 2) yani ikiye-iki bir martistir. İki satırı ve iki sütunu vardır. Burada , $b_{11} = 5$, $b_{12} = 11$; $b_{21} = 2$, $b_{22} = 3$ olmaktadır.

iii. $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ matrisi (2 x 3) yani ikiye-üç bir martistir. İki satırı ve üç sütunu vardır. Burada $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 4$; $a_{21} = 3$, $a_{22} = -1$, $a_{23} = 7$ olmaktadır.

Tanım 2.2. Kare ve sıfır matris.

i. A = $[a_{ij}]$ (n x n) ise, yani n satırı ve n sütunu varsa, A (n x n) kare matristir denir.

ii. Eğer bir (n x m) matrisin bütün elemanları sıfır ise matris (n x m) sıfır matristir denir ve O_{nm} olarak gösterilir.

Bu tanıma göre Örnek 2.1 (i) örneğinde A (3 x 3) yani üçe-üç kare bir matristir. Aynı örnekte (ii) örneğinde B (2 x 2) kare matristir. Öte yandan

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (3 x 3) sıfır, yani O_{33}, matristir.

Tanım 2.3. Matris toplamı ve skalar çarpım.

i. (Skalar çarpım) $A = [a_{ij}]$, (n x m) ve $\alpha \in R$ ise, $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$, (n x m) olur, yani bir matrisin bir sayıyla (skalar) çarpımı matrisin bütün elemanlarını o sayıyla çarparak elde edilir.

i i. (Matris toplamı) $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$, ve her iki matriste (n x m), yani aynı mertebeden, olmak üzere $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$, (n x m) olur. Dolayısıyla aynı mertebeden iki matrisin toplamı toplanan matrislerle aynı mertebendendir ve matrislerin karşılıklı elemanlarının toplamı olarak elde edilir.

Uyarı: Bu tanıma göre iki matris aynı mertebeden değilse matrisler için toplama işlemi tanımlı değildir. İki matris için toplama işlemi tanımlıysa matrisler toplama işlemi için uyumludur denir.

Örnek 2.2.

i. $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ ve $\alpha = 3$ olsun. $\alpha A = [3a_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 9 & -3 & 21 \end{bmatrix}$ olur.

ii. $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ ve $B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ olsun. A (2 x 3) ve B (3 x 3) matris olduklarından A + B işlemi tanımlı değildir, ya da A ve B toplama işlemi için uyumlu değildir.

iii. $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ ve $B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -7 \end{bmatrix}$ olsun. Her iki matris de (2 x 3) olduklarından toplama işlemi tanımlıdır ve

$C = A + B = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 4+0 \\ 3+1 & -1-1 & 7-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere (2 x 3) bir matristir.

iv. $A=\begin{bmatrix}1 & 5 & -1\\ 0 & 4 & 6\\ 7 & 2 & 3\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 8 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ olsun. Her iki matriste (3 x 3) kare matris olduklarından A + B tanımlıdır ve

$C=A+B=\begin{bmatrix}3 & 6 & 2\\ 8 & 7 & 8\\ 8 & 3 & 4\end{bmatrix}$ olmak üzere (3 x 3) kare bir matristir.

Skalar çarpım ve toplama işlemlerini kullanarak **çıkarma** işlemi de tanımlayabiliriz. Öncelikle, A = [a_{ij}], (n x m) olmak üzere –A = (-1)A = [-a_{ij}] olacağı açıktır. O halde B = [b_{ij}], (n x m) olmak üzere A + (-1)B = A – B = [a_{ij} – b_{ij}], (n x m) olacaktır. Eğer A ve B aynı mertebeden ve A – B = O_{nm} ise A ve B matrisleri **eşittir** denir ve A = B olarak gösterilir. Buna göre A = B ancak ve ancak $a_{ij} = b_{ij}$, i = 1, ..., n; j = 1, ..., m ise doğrudur. A ve B eşit değilse, yani bazı $a_{ij} \neq b_{ij}$ ise, A ≠ B yazılır.

Örnek 2.3.

$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -1 & 7\end{bmatrix}$ ve $B=[b_{ij}]=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 5\end{bmatrix}$ verilmiş olsun.

i. $A-B=[a_{ij}-b_{ij}]=\begin{bmatrix}1-2 & 2-2 & 4-0\\ 3-1 & -1-2 & 7-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 4\\ 2 & -3 & 2\end{bmatrix}$ olur.

ii. $2A-3B=[2a_{ij}-3b_{ij}]=\begin{bmatrix}2-6 & 4-6 & 8-0\\ 6-3 & -2-6 & 14-15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -2 & 8\\ 3 & -8 & -1\end{bmatrix}$ olur.

Teorem 2.1. A, B ve C (n x m) matrisler ve α, β ∈ R olmak üzere:

i. A + B = B + A (toplamanın değişme kuralı)

ii. A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C) (toplamanın birleşme kuralı)

iii. A + O_{nm} = A

iv. A – A = O_{nm}

v. α(A + B) = αA + αB (skalar çarpımın toplama üzerinde dağılma özelliği)

vi. (α + β)(A + B) = α(A + B) + β(A + B).

Bu teorem reel sayıların ilgili özelliklerinden kaynaklanır. Örneğin A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] ve C = [c_{ij}], ve aynı mertebeden olmak üzere A + B + C = [$a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}$] dir. Ama $a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$ olduğundan (ii) doğrudur. Benzer şekilde $(\alpha + \beta)(A + B) = [(\alpha + \beta)(a_{ij} + b_{ij})] = [\alpha a_{ij} + \beta a_{ij} + \alpha b_{ij} + \beta b_{ij}] = [(\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}) + (\beta a_{ij} + \beta b_{ij})]$ olduğundan (vi) doğrudur.

Tanım 2.4. Birim Matris.

A = [a_{ij}], (n x n) bir kare matris olsun. Eğer

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

oluyorsa A (n x n) birim matristir denir ve I_n olarak gösterilir.

Buna göre birim matris her zaman kare bir matristir ve köşegen elemanları (yani i = j olduğunda) bire, diğer elemanları (i ≠ j) ise sıfıra eşittir. Örneğin,

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri, sırasıyla, (2 x 2) ve (3 x 3) birim matrislerdir.

Karışıklığa yol açmadığı sürece birim matrisi sadece I olarak göstereceğiz.

Şimdi reel sayılar için 1 sayısı çarpma işleminde birim elemandır yani $\alpha \in R$ olmak üzere $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$'dır. Matris cebirinde de, çarpma işlemi tanımlanınca, birim matrisin aynı şekilde çarpma işleminin birim elemanı olduğu görülecektir.

Tanım 2.5. Matris Çarpımı.

A = [a_{ij}], (n x q) ve B = [b_{ij}], (q x m) matrisler olsun. Bu durumda A ve B çarpma işlemi için uyumludur denir, işlem AB ile gösterilir ve

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}$$

olmak üzere C = AB = [c_{ij}], (n x m) bir matristir.

Bu tanıma göre AB işleminin tanımlı olması için A matrisinin sütun sayısının (q) B matrisinin satır sayısına eşit olması gerekir ve AB matrisinin satır sayısı A ile, sütün sayısı B ile aynıdır:

$$\underset{A}{(n \times \mathbf{q})}\,\underset{B}{(\mathbf{q} \times m)} \quad \rightarrow \quad \underset{C}{(n \times m)}.$$

Çarpım matrisinin c_{ij} elemanı A'nın i^{inci} satır elemanları ile B'nin j^{inci} sütun elemanlarının karşılıklı çarpımının toplamıyla elde edilir. Örneğin A (2 x 3) ve B (3 x 4) matrisler olmak üzere C = AB (2 x 4) bir matris olarak tanımlıdır ve

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$$

ve Tanım 2.4'de uygun olarak:

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$ = ΣA'nın 1^{inci} satır elemanları x B'nin 1^{inci} sütun elemanları
$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$ = ΣA'nın 1^{inci} satır elemanları x B'nin 2^{nci} sütun elemanları
$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$ = ΣA'nın 1^{inci} satır elemanları x B'nin $3^{üncü}$ sütun elemanları
$c_{14} = a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} + a_{13}b_{34}$ = ΣA'nın 1^{inci} satır elemanları x B'nin $4^{üncü}$ sütun elemanları

$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$ = ΣA'nın 2^{nci} satır elemanları x B'nin 1^{inci} sütun elemanları
$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$ = ΣA'nın 2^{nci} satır elemanları x B'nin 2^{nci} sütun elemanları
$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$ = ΣA'nın 2^{nci} satır elemanları x B'nin $3^{üncü}$ sütun elemanları
$c_{24} = a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} + a_{23}b_{34}$ = ΣA'nın 2^{nci} satır elemanları x B'nin $4^{üncü}$ sütun elemanları

olmaktadır.

Örnek 2.4.

i. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}$, olsun. Şimdi, A (2 x 2), B (2 x 1) ve C (1 x 2) matrislerdir. O halde AB (2 x 1), CA (1 x 2), BC (2 x 2) ve CB (1 x 1), yani bir sayı, olmak üzere tanımlıdır. Her dört durumda da önden (ya da soldan) çarpan matrisin sütun sayısı, çarpılan matrislerin satır sayısına eşittir. Ama AC çarpımı tanımlı değildir çünkü A'nın 2 sütunu, C'nin ise sadece bir satırı vardır. O halde,

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 + 2.2 \\ 3.4 + 5.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 22 \end{bmatrix}$ olmak üzere (2 x 1) matristir.

$CA = \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.1 + 8.3 & 7.2 + 8.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 54 \end{bmatrix}$ olmak üzere (1 x 2) matristir.

$BC = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.7 & 4.8 \\ 2.7 & 2.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 32 \\ 14 & 16 \end{bmatrix}$ olmak üzere (2 x 2) matristir.

$CB = \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.4 + 8.2 \end{bmatrix} = 44$ olmak üzere bir sayıdır.

BC ve CB işlemlerinin karşılaştırılmasından görüldüğü gibi BC ≠ CB dir, yani iki martisin her iki yönde de çarpımı tanımlı olsa bile çarpımlar, reel sayıların aksine, eşit olmayabilir. Bu örnekte olduğu gibi BC (2 x 2) matris iken CB bir sayı olmak üzere mertebeleri bile farklı olabilmektedir.

ii. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda AB, BA, AC (2 x 2) matrisler olmak üzere tanımlıdır ve

$AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, BA=\begin{bmatrix}6 & 12\\ -3 & -6\end{bmatrix}$ olmaktadır. Bir önceki örnekte olduğu gibi AB ≠ BA dır. Ayrıca AB = 0_{22} olmasına rağmen A ve B sıfır matrisler değildir, yani sıfır olmayan matrislerin çarpımı sıfır matris olabilmektedir. Öte yandan AC = 0_{22} olduğu da açıktır. Dolayısı ile AB = AC olduğu halde B ≠ C dir.

iii. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & -5 & 1\end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda AB = BA = I_{33} ((3 x 3) birim matris) olmaktadır.

iv. $I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & 1 & 5\\ 2 & 5 & 1\end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda IA = A = AI olmaktadır.

Bu örneklerden aşağıdaki hususlar çıkmaktadır:

- Bir AB çarpımı tanımlı olsa bile BA tanımlı olmayabilir.
- Hem AB hem de BA tanımlı iken AB ≠ BA veya AB = BA olabilir.
- Bir AB çarpımının sıfır matris olması A'nın veya B'nin sıfır matris olmasını gerektirmez. Genel olarak çarpım için uyumlu A, B, C matrisleri AB = AC eşitliğini sağlasa bile B = C olması gerekmez.
- Bir A matrisinin birim matris ile (uyumlu olmak kuşuluyla) soldan ya da sağdan çarpımı A'nın kendisidir. Yani birim matris çarpma işleminin birim elemanıdır.

Teorem 2.2. A, B, C, D matrisleri gösterilen toplama ve çarpma işlemleri için uyumlu ve α ∈ R olmak üzere:

i. A(B + C) = AB + AC (çarpmanın soldan dağılma özelliği)

ii. (A + B)C = AC + BC (çarpmanın sağdan dağılma özelliği)

iii. ABC = A(BC) = (AB)C (çarpmanın birleşme kuralı)

iv. (A + B)(C + D) = A(C + D) + B(C + D)

v. (αA)B = α(AB).

Tanım 2.6. Bir matrisin devriği ve bazı özel matrisler.

i. A = [a_{ij}], (n x m) olsun. A^t = [a_{ji}], (m x n), yani A nın sütunlarını (satırlarını) satır (sütun) olarak yazarak elde edilen matrise A nın devriği (ya da transposu) denir.

ii. A = [a_{ij}], (n x n) kare matris olsun. Eğer A = A^t ise yani $a_{ij} = a_{ji}$ (bütün i ve j ler için) A matrisi simetrik (ya da bakışımlı) matristir denir.

iii. A = [a_{ij}], (n x n) kare matris olsun. Eğer,

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ii}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

oluyorsa, yani A'nın köşegen üzerinde olmayan elemanları sıfır, köşegen elemanları (en azından bazıları) sıfırdan farklı ise, A (n x n) köşegen matristir denir.

iv. A = [a_{ij}], (n x n) kare matris olsun. Eğer,

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{cases},$$

oluyorsa, yani A'nın köşegenin altında kalan elemanları sıfır, diğer elemanları (en azından bazıları) sıfırdan farklı ise, A (n x n) üst üçgen matristir denir.

v. A = [a_{ij}], (n x n) kare matris olsun. Eğer,

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases},$$

oluyorsa, yani A'nın köşegenin üstünde kalan elemanları sıfır, diğer elemanları (en azından bazıları) sıfırdan farklı ise, A (n x n) alt üçgen matristir denir.

Örnek 2.5.

i. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (2 x 3) matrisinin devriği $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ olmak üzere (3 x 2) matristir. $(A^t)^t$ = A, yani devriğin devriğinin matrisin kendisi, olduğuna dikkat ediniz. AA^t matrisinin (2 x 2), A^tA matrisinin ise (3 x 3) kare matrisler olduğuna dikkat ediniz ve her iki çarpımı da hesaplayınız.

ii. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}$ (2 x 3) ve $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 0\end{bmatrix}$ (3 x 2) matrisler olsun. O halde $A^t=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ ve $B^t=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 0\end{bmatrix}$ ve $B^tA^t=\begin{bmatrix}22 & 9\\ 10 & 8\end{bmatrix}$ olur. Öte yandan $AB=\begin{bmatrix}22 & 10\\ 9 & 8\end{bmatrix}$ dir ve $(AB)^t = B^tA^t$ olmaktadır.

iii. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 5\\ 3 & 5 & 7\end{bmatrix}$ matrisi (3 x 3) simetrik bir matristir, çünkü $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$ ve $a_{23} = a_{32}$ dir. $A = A^t$ olduğuna dikkat ediniz.

iv. Bütün birim matrisler köşegen matrislerdir. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$ matrisi (3 x 3) köşegen bir matristir. Köşegen matrisler tanım gereği simetriktir, yani $A = A^t$ dır.

v. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ matrisleri, sırasıyla, (3 x 3) ve (2 x 2) üst üçgen matrislerdir.

$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 3 & 5 & 7\end{bmatrix}$ matrisi ise (3 x 3) alt üçgen matristir.

Devrik alma işlemi ile ilgili olarak şu iki özelliğe dikkat ediniz:

- $(A^t)^t = A$: devriğin devriği A dır.
- $(AB)^t = B^tA^t$: bir çarpımın devriği devriklerin ters yönden çarpımıdır.

$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}x & y\\ z & v\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \sigma & \rho\end{bmatrix}$ matrislerini kullanarak aşağıdaki sonuçları (2 x 2) durumu için ispatlayınız:

i. $(AB)^t = B^tA^t$
ii. $(ABC)^t = C^tB^tA^t$
iii. A ve B simetrik matrisler olsa bile AB simetrik olmayabilir. A ve B simetrik olmak üzere AB ancak ve ancak AB = BA ise simetriktir.
iv. AA^t ve A^tA her (n x m) matris için simetriktir.
iv. Bir (n x n) matrisin asal köşegen elemanlarının toplamına matrisin izi denir ve izA olarak gösterilir. Buna göre $izA = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ olmaktadır. iz(A + B) = izA + izB ve $izA = izA^t$ dir.

2.2. DETERMİNANTLAR

Tanım 2.7. (2 x 2) Matrisin Determinantı.

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (2 x 2) kare bir matrisin determinantı, detA ya da $|A|$ olarak gösterilir ve

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

olmak üzere reel bir sayıdır. Yani (2 x 2) matrisin determinantı asal köşegen elemanlarının çarpımından, ters köşegen elemanlarının çarpımının çıkarılması yoluyla bulunur.

Buna göre $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ matrislerinin determinantları

$$\det A = 1.4 - 1.2 = 2,\ \det B = 3.2 - 0.1 = 6,\ \text{ve } \det C = 1.2 - 1.2 = 0$$

olarak hesaplanır. B'nin alt üçgen bir matris olduğuna ve determinantının (asal) köşegen elemanlarının çarpımı olduğuna dikkat ediniz. Benzer şekilde üst üçgen ya da köşegen (2 x 2) matrislerin determinantları da (asal) köşegen elemanlarının çarpımlarından ibaret olacaktır. Uygun birer matris yazarak bunu gösteriniz.

Daha üst mertebeden matrislerin determinantlarını (2 x 2) matrislerin determinantları yardımıyla tanımlayacağız. Bunun için önce (3 x 3) matris için ***minör ve kofaktör*** (ya da eşçarpan) tanımlarını vermek gerekiyor. Şimdi,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrisinde a_{ij} elemanının minörü A'nın i^{inci} satırının ve j^{inci} sütunun çıkarılması ile elde edilen (2 x 2) altmatrisin determinantı olarak tanımlanır ve $\mathbf{M_{ij}}$ ile gösterilir. Buna göre

$M_{11}=\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ (A'nın birinci satırı ve birinci sütunu çıkarıldı)

$M_{12}=\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$ (A'nın birinci satırı ve ikinci sütunu çıkarıldı)

$M_{13}=\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ (A'nın birinci satırı ve üçüncü sütunu çıkarıldı)

$M_{21}=\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ (A'nın ikinci satırı ve birinci sütunu çıkarıldı)

$M_{22}=\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$ (A'nın ikinci satırı ve ikinci sütunu çıkarıldı)

$M_{23} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ (A'nın ikinci satırı ve üçüncü sütunu çıkarıldı)

$M_{31} = \det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ (A'nın üçüncü satırı ve birinci sütunu çıkarıldı)

$M_{32} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$ (A'nın üçüncü satırı ve ikinci sütunu çıkarıldı)

$M_{33} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (A'nın üçüncü satırı ve üçüncü sütunu çıkarıldı)

olmak üzere (3 x 3) matrisin dokuz tane minörü vardır. Böylece, (2 x 2) determinant tanımını kullanarak, örneğin $M_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, $M_{32} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}$ olmaktadır. $\mathbf{A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}}$ işaretli minörlerine de a_{ij} elemanının kofaktörü denir. Dolayısı ile A'nın kofaktörleri

$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$
$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$
$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}$
$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -M_{21}$
$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = M_{22}$
$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -M_{23}$
$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = M_{31}$
$A_{32} = (-1)^{3+2}M_{11} = -M_{11}$
$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = M_{33}$

olmaktadır. Kofaktörlerin işaretlerinin

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

biçiminde bir kalıp izlediklerine dikkat ediniz. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisinin minörleri ve kofaktörleri

$M_{11} = 2.4 - 1.1 = 7$ ve $A_{11} = 7$
$M_{12} = 3.4 - 1.5 = 7$ ve $A_{12} = -7$
$M_{13} = 3.1 - 2.5 = -7$ ve $A_{13} = -7$
$M_{21} = 0.4 - 1.2 = -2$ ve $A_{21} = 2$
$M_{22} = 1.4 - 2.5 = -6$ ve $A_{22} = -6$
$M_{23} = 1.1 - 0.5 = 1$ ve $A_{23} = -1$
$M_{31} = 0.1 - 2.2 = -4$ ve $A_{31} = -4$
$M_{32} = 1.1 - 3.2 = -5$ ve $A_{32} = 5$
$M_{33} = 1.2 - 0.3 = 2$ ve $A_{33} = 2$

olarak hesaplanır. Şimdi A'nın birinci satır elemanlarını kofaktörleriyle çarparak toplayalım:

$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1.7 + 0.(-7) + 2.(-7) = -7.$

Bu işleme A'nın birinci satırı üzerinden ***Laplace açılımı*** denir. Aynı şeyi A nın diyelim ikinci satırı

$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 3.2 + 2.(-6) + 1.(-1) = -7$ (A'nın ikinci satırı üzerinden Laplace açılımı)

ya da üçüncü sütunu için yaparsak:

$a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = 2.(-7) + 1.(-1) + 4.(2) = -7$ (A'nın üçüncü sütunu üzerinden Laplace açılımı)

buluruz. Okuyucu A'nın herhangi bir satırı veya sütunu üzerinden Laplace açılımı yaparsa –7 sonucunu bulacaktır. Her durumda a_{ij} leri kendi kofaktörleriyle çarptığımıza dikkat ediniz.

Öte yandan A'nın birinci satır elemanlarını, diyelim ikinci satır kofaktörleriyle çarparak toplarsak

$a_{11}A_{12} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 1.2 + 0 + 2(-1) = 0$

buluruz. Yabancı kofaktörlerle, yani A'nın herhangi bir satır ya da sütün elemanlarını başka bir satır ya da sütunun kofaktörleriyle çarparak, yapılan açılımlar, okuyucunun denemesi gerektiği gibi, her zaman sıfır sonucunu verir.

Tanım 2.8. (3 x 3) Matrisin Determinantı.

$A = [a_{ij}]$, (3 x 3) kare matrisinin determinantı herhangi bir satır ya da sütun üzerinden Laplace açılımına eşittir. Dolayısı ile

i^{inci} satır üzerinden $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$
j^{inci} sütun üzerinden $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{1j}A_{2j} + a_{1j}A_{2j}$

olarak tanımlanır.

Bir matrisin determinantı tek bir sayıdır. Dolayısı ile determinant hesaplanırken hangi satırı veya sütunu seçtiğimiz sonucu değiştirmeyecektir. Pratikte açılım en çok sıfır içeren satır ya da sütun üzerinden yapılır.

Örneğin $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını ikinci sütun (ya da birinci satır) üzerinden hesaplamak uygun olacaktır. Bu durumda sadece iki kofaktör (A_{22} ve A_{32}) hesaplamak yeterlidir. Böylece $\det A = a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = 3(1.5 – 1.4) - 2(1.1 – 1.2) = 5$ olur.

Laplace açılımı tekniği her mertebeden kare matrise uygulanır. Genel bir A (n x n) matrisinin minörleri (M_{ij}) A'nın ilgili satır ve sütunun çıkarılmasıyla elde edilen (n-1 x n-1) altmatrisin determinantı, kofaktörleri ise işaretli minörler yani $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ olur. Böylece, hesaplanacak determinantların mertebesi (2 x 2) determinanta kadar azaltılarak hesaplama yapılır. Kofaktörler hesaplandıktan sonra herhangi bir satır ya da sütun üzerinden Laplace açılımı uygulanarak determinant hesaplanır. Burada (4 x 4) bir matris örneği vermekle yetineceğiz.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ olsun. Laplace açılımını en çok sıfır içeren dördüncü sütun üzerinden

yaparsak $\det A = a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44}$ olacaktır. Gene her elemanı kendi kofaktörü ile çarptığımıza dikkat ediniz. Burada $a_{14} = a_{34} = 0$ olduğundan

$\det A = a_{24}A_{24} + a_{44}A_{44}$

olacaktır. Dolayısıyla sadece iki kofaktör hesaplamak yeterlidir.

$$A_{24} = (-1)^{2+4} M_{24} = M_{24} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

((3 x 3) determinant birinci satır üzerinden Laplace açılımıyla hesaplandı.)

$$A_{44} = (-1)^{4+4} M_{44} = M_{24} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -6.$$

((3 x 3) determinant birinci sütun üzerinden Laplace açılımıyla hesaplandı.)

A_{24} ün A'nın ikinci satırını ve dördüncü sütununu; A_{44} ün A'nın son satır ve sütununu çıkararak elde edildiklerine dikkat ediniz. O halde

$\det A = a_{24}A_{24} + a_{44}A_{44} = 1.(-2) + 4.(-6) = -26$ olur.

Şimdi determinantların temel özelliklerine ilişkin önemli bir sonucu veriyoruz.

Teorem 2.3. A = [a_{ij}], (n x n) kare matris olsun. Öyleyse,

i. $\det A = \det A^t$, yani bir matrisin devriğinin determinantı matrisin determinantı ile aynıdır.
ii. A nın bir satır ya da sütun elemanlarının hepsi sıfırsa detA = 0 olur.
iii. A nın iki satır ya da sütunu yer değiştirilirse detA işaret değiştirir ve her yer değiştirmede işaret değişir.
iv. A nın iki satır ya da sütunu aynı ise detA = 0 olur.
v. A nın bir satırı (sütunu) bir sayı ile çarpılıp başka bir satıra (sütuna) eklenmesi veya çıkarılmasıyla elde edilen matrisin determinantı detA ile aynıdır.

vi. A nın bir satır ya da sütun elemanlarını bir α sayısı ile çarparak elde edilen matrisin determinantı αdetA dır. A nın k satırı (sütunu) α ile çarpılırsa determinant α^kdetA olur. det[αa_{ij}] = α^ndetA dır.
vii. A köşegen, alt üçgen veya üst üçgen bir matris ise determinantı A nın (asal) köşegen elemanlarının çarpımına eşittir, yani detA = $a_{11}a_{22}a_{33}....a_{nn}$ dir.

Bu teoremin doğruluğunu (2 x 2) bir matrix ile başlayarak gösterebiliriz.

i. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ise $A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ dir. Dolayısı ile detA = $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ = detA^t dir. Bu sonucun önemi A nın satırları için doğru olan herşeyin sütunları için de doğru olması anlamına gelmesindendir. Çünkü A nın sütunları A^t nin satırlarıdır. Dolayısı ile A nın sütunlarına ilişkin herşeyi devriğinin satırları üzerinden gösterebiliriz. Öyleyse gösterimin kalanını sadece satırlar (ya da sütunlar) için yapabiliriz.
ii. A nın herhangi bir satırı sıfırlardan oluşuyorsa, örneğin $a_{11} = 0 = a_{12}$, detA = 0 olacağı açıktır.
iii. A nın iki satırı yer değişirse $A^* = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$ olur ve detA* = $a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}$ = -detA olur yani işaret değiştirir.

iv. (2 x 2) bir matrisin iki satırı aynı ise $a_{11} = a_{21}$ ve $a_{12} = a_{22}$ olmalıdır. O halde detA = $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11} = 0$ olur.
v. A nın ikinci sütununu bir k ile çarpıp birinci sütuna eklersek $B = \begin{bmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} \end{bmatrix}$ elde ederiz. Dolayısı ile detB = $a_{11}a_{22} + ka_{12}a_{22} - a_{12}a_{21} - ka_{12}a_{22}$ = detA olur.

vi. $\det\begin{bmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = k \det A$ olduğu açıktır. İkinci sütunu da k ile çarparsak k^2detA olacağı da kolaylıkla gösterilir.

vii. A diyelim alt üçgen ise $a_{12} = 0$ dır dolayısı ile detA = $a_{11}a_{22}$ olur.

Şimdi genel hali ele alalım.
i. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ise $A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ olur. A^t nin determinantını birinci satır üzerinden hesaplarsak

$\det A^t = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$ elde ederiz. Ama bu A nın determinantının birinci sütun üzerinden hesaplanması ile aynı şeydir. Dolayısı ile (3 x 3) matris için detA = detA^t olur. Burada dikkat edilecek husus devrik alma işleminin (2 x 2) altmatrislerin determinant değerlerini, yani A nın minörlerini, etkilemediğidir. (4 x 4) bir matrisin determinantı (3 x 3) determinant değerlerine bağlıdır ki şimdi gösterdiğimiz gibi bunlar devrik

alma işleminden etkilenmez. O halde sonuç (4 x 4) matris için de geçerlidir. Böylece tümevarım yoluyla detA = detA^t özelliğinin genel olarak geçerli olduğu görülür.

ii. Herhangi bir mertebeden A matrisinin bir satır elemanlarının hepsi sıfırsa Laplace açılımı o satır üzerinden yapılır ve sonuç sıfır olur.

iii. (3 x 3) bir matrisin üçüncü satır elemanlarının minörleri ilk iki satırdan elde edilen (2 x 2) matrislerin determinantıdır. İlk iki satırın yerlerini değiştirirsek (2 x 2) matrislerin satırları yer ve determinantları işaret değiştirir. Dolayısı ile üçüncü satır üzerinden yapılan Laplace açılımı detA nın ters işaretlisidir. Daha yüksek mertebeden matrisler için tümevarım yönteminin kurgulanmasını okuyucuya bırakıyoruz.

iv. Bir matrisin iki satırı aynıysa bunların yerlerini değiştirmek detA nın değerini etkilememelidir. Ama (iii) özelliğinden detA işaret değiştirmelidir ki bu da ancak detA = 0 ise olur.

v. Diyelim ki bir A (n x n) matrisinin ikinci satırını bir k ile çarpıp birinci satıra ekledik ve yeni matrisin (B diyelim) determinantını birinci satır üzerinden Laplace açılımı ile hesaplıyoruz:

$$\det B = (a_{11} + ka_{12})A_{11} + (a_{12} + ka_{22})A_{12} + \ldots + (a_{1n} + ka_{2n})A_{1n}.$$

Dikkat edilirse burada $B_{1j} = A_{1j}$ dir çünkü kofaktörler hesaplanırken birinci satır çıkarılmaktadır ve A ile B birinci satır dışında aynı matrislerdir. Dolayısı ile

$$\det B = (a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}) + k(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{12} + \ldots + a_{2n}A_{1n}) = \det A$$

olur çünkü son parantez içinde yabancı kofaktörlerle yapılan açılım vardır ve her zaman sıfırdır.

vi - vii. (3 x 3) matristen başlayarak gösterimi alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır.

Bu teorem determinantların hesaplanmasında kolaylık sağlamaktadır.

Örnek 2.6.

i. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 9 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ise $A' = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ dir. detA'yı hesaplamak için ikinci satırı birinci satırdan çıkararak $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ elde ederiz. Teorem 3 (v) özelliğinden detA = detB olmalıdır ve B nin determinantını hesaplamak nispeten daha kolaydır, çünkü birinci satırında bir eleman sıfırdır. Dolayısı ile B nin determinantını birinci satır üzerinden hesaplarsak detA = detB = -2(4.3 – 3.9) + (-1)(4.4 – 1.3) = 2 buluruz. A' nün determinantının hesaplanarak detA'ya eşit olduğunun gösterilmesini alıştırma olarak bırakıyoruz.

ii. $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 1\\ 7 & 3 & 4\end{bmatrix}$ ise detA = 0 dır. Çünkü, A nın son iki sütununu toplayıp birinci sütundan çıkarırırsak $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}$ elde ederiz. (v) özelliğinden detA = detB dir ve (ii) özelliğinden detB = 0 dır. Aynı sonucu (iv) özelliğinden de gösterebiliriz. A nın son sütununu ikinci sütuna eklersek elde edilen matrisin determinantı aynı kalır. Ama bu yolla elde edilen matrisin (B* diyelim) ilk iki sütunu aynıdır ve determinantı (iv) özelliğinden sıfırdır. Burada biz aynı sonucu B* ın ikinci sütununu ilkinden çıkararak gösterdik.

iii. $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 9\\ 7 & 4 & 3\end{bmatrix}$ matrisinin ilk iki satırının yeri değiştirilirse $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 9\\ 2 & 2 & -1\\ 7 & 4 & 3\end{bmatrix}$ elde edilir. A nın ikinci satırını ikiyle çarpıp ilkinden çıkararak elde edilen matrisin determinantı = detA = -19(1.4 – 1.7) = 57 olur. B nin ilk satırını ikiyle çarpıp ikincisinden çıkararak elde edilen matrisin determinantı = detB = 19(1.4 – 1.7) = -57 = -detA olur. Böylece iki satırın yerinin değiştirilmesi determinantın işaretini değiştirmiştir. Bu değiştirmeden sonra yapılacak her değiştirme tekrar işaret değiştirecektir. Örneğin, B nin son iki sütunun yer değiştirilmesi ile elde edilen matrisin determinantının –detB = detA olduğunun gösterimini okuyucuya bırakıyoruz.

iv. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2 & 2\\ 3 & 4 & 2 & 3\\ 1 & 5 & 7 & 4\end{bmatrix}$ olsun. A nın ilk satırını ikiyle çarpıp ikincisinden çıkarırısak

$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 2 & 3\\ 1 & 5 & 7 & 4\end{bmatrix}$ olur. detA = detB = $\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 1 & 7 & 4\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 7 & 4\end{bmatrix}=-3$ olarak hesaplanır. (3 x 3) determinantı hesaplarken ilk satırı üç ile çarpıp ikinci satırdan çıkararak işlem yaptığımıza dikkat ediniz.

v. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ bir üst üçgen matris olsun. Buna göre detA = $a_{11}a_{22}a_{33}$ = 1.2.4 = 8 olmalıdır. Gerçekten de detA yı son satır üzerinden Laplace açılımı ile hesaplarsak

$\det A=4\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=4(1.2)=8$ olur.

Tanım 2.9. Tekil olmayan matrisler ve ters matris.

A = [a_{ij}] (n xn) kare matris olsun. Eğer AB = BA = I olacak şekilde (n x n) bir B matrisi varsa A tekil olmayan, ya da tersi olan, bir matristir denir. Bu durumda B, A nın ters matrisidir denir ve B = A^{-1} olarak gösterilir. Eğer böyle bir A^{-1} matrisi yoksa A tekil bir matristir denir.

Ters matrisin sadece kare matrisler için tanımlandığına ve her kare matrisin tersinin olması gerekmediğine dikkat ediniz. Tekil matrisler tersi olmayan matrislerdir. Örneğin,

$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ matrsini ele alalım. Bir $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ matrisinin A nın tersi olması için AB = BA = I olması yani $AB=\begin{bmatrix}a+c & b+d\\ 2a+2c & 2b+2d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ gerekir. Matris eşitliği tanımından a + c = 1, b + d = 0, 2(a + c) = 0, ve 2(b + d) = 1 ya da 1 = 0 olmalıdır ki bu da olamaz. Dolayısı ile A tekil bir matristir yani tersi yoktur. Tekil olan A matrisi için detA = 0 olduğuna dikkat ediniz. Öte yandan $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ matrisi ve $B=\begin{bmatrix}2 & -0.5\\ -1 & 0.5\end{bmatrix}$ matrislerini ele alalım. AB = BA = I ((2 x 2) birim matris) olduğu kolaylıkla görülür. Yani A^{-1} vardır ve A tekil olmayan bir matristir. Tekil olmayan A matrisi için detA ≠ 0 olduğuna dikkat ediniz.

Tanım 2.10. Eşmatris.

A = [a_{ij}] (n xn) kare matris olsun. A nın kofaktörlerinden oluşan matrisin devriğine A nın eşmatrisi denir ve eşA olarak gösterilir.

Şimdi (2 x 2) bir matrisin kofaktörleri $A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = -a_{21}$, $A_{21} = -a_{12}$, $A_{22} = a_{11}$ dir. Dolayısı ile $esA=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$ dir. Yani (2 x 2) bir matrisin eşmatrisi köşegen elemanların yerlerini, köşegen olmayan elemanların da işaretlerini değiştirmek suretiyle kolayca hesaplanır. Burada

$A(esA)=\begin{bmatrix}a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}\\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\det A & 0\\ 0 & \det A\end{bmatrix}$ olduğunu görüyoruz.

Bunun nedeni A(eşA) matrisinin asal köşegen elemanlarının A nın satırları itibariyle Laplace açılımları; ters köşegen elemanlarının ise A nın satırları itibariyle yabancı kofaktör açılımları olmasıdır. Determinant bahsinden bildiğimiz gibi Laplace açılımları A nın determinantı iken, yabancı kofaktör açılımları her zaman sıfırdır. (eşA)A matrisi de, okuyucunun göstermesi gerektiği gibi, $\begin{bmatrix}\det A & 0\\ 0 & \det A\end{bmatrix}$ sonucunu verecektir. Dolayısı ile detA ≠ 0 olmak üzere (2 x 2) bir matrisin tersi

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}esA=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

olacaktır.

Bir (3 x 3) kare matris için ise $esA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ olur. eşA nın sütun elemanlarının (satır elemanlarının) A nın satır elemanlarının (sütun elemanlarının) kofaktörleri olduğuna dikkat ediniz. Burada da A(eşA) $= \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix}$ = (eşA)A olacaktır. Çünkü köşegen elemanlar Laplace açılımları olurken, köşegen üzerinde olmayan elemanlar yabancı kofaktörlerle açılımdır ve sıfırdır. Dolayısı ile (3 x 3) bir matrisin tersi, gene detA ≠ 0 olmak üzere, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} esA$ dır.

Örnek 2.7.

i. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ olsun. detA = 0 olduğundan A tekil bir matristir, A^{-1} yoktur. Bunu görmek için $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \delta \\ x & y & z \end{bmatrix}$ matrisinin A nın tersi olduğunu düşünelim. Öyleyse AB = I olmalıdır. Dolayısıyla AB nin, örneğin, birinci sütun elemanları I nın birinci sütun elemanlarına eşit yani

$2a + \alpha + x = 1$
$5a + 4\alpha + x = 0$
$7a + 3\alpha + 4x = 0$

olmalıdır. Ama bu üç denklemi sağlayan (a, α, x) sayıları yoktur. Çünkü birinci denklemi ikincisinden çıkarırsak $3a + 3\alpha = -1$ ya da $a = -\alpha - 1/3$ elde ederiz. Bunu denklemlerde yerine koyarsak

$-\alpha + x = 5/3$
$-\alpha + x = 5/3$
$-4\alpha + 4x = 7/3$

çıkar ki bu da 5/3 = 7/12 demek olur. Dolayısı ile AB = I sağlayan bir B matrisi yoktur.

ii. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. detA = 1 dir ve A^{-1} vardır. eşA = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve detA = 1 olduğuna göre $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olur. $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ olduğu kolaylıkla görülür.

ii. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. Burada detA = 2 dir ve A tekil olmayan bir matristir. A nın eşmatrisi

eşA = $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ dir. Dolayısı ile $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -0.5 & 1.5 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

olur. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ olduğunun sağlamasını okuyucuya bırakıyoruz.

iv. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. Bu üst üçgen matrisini determinantı detA = 1.2.4.1 = 8 dir.

Matrisin eşmatrisi eşA = $\begin{bmatrix} 8 & -8 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ dır. Öyleyse

$B = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 8 & -8 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0.75 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olur ve BA = AB = I olduğu

gösterilebilir. Yani (4 x 4) bir matris için de detA $\neq$ 0 ise A^{-1} = (1/detA)eşA olmaktadır.

Bu sonuçları aşağıdaki teoremde topluyoruz.

Teorem 4. A = $[a_{ij}]$ (n x n) kare matris olsun. Eğer detA $\neq$ 0 ise A tekil olmayan bir matristir ve $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ eşA dır. Eğer detA = 0 ise A tekil bir matristir ve tersi yoktur.

Theorem 5. A ve B (n x n) tekil olmayan matrisler olsun. Öyleyse,

i. A^{-1} tektir, yani A nın ayrı iki tersi olamaz.

ii. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, yani devriğin tersi, tersin devriğidir.

iii. A simetrik ise A^{-1} de simetrik bir matristir.

iv. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Kanıt: i) C ve D A nın ters matrisleri olsun. Dolayısı ile CA = BA = I dır. Öyleyse AB = I $\Rightarrow$ C(AB) = CI = C olur. Ama C(AB) = (CA)B = IB = B olduğundan B = C olmalıdır. ii) Tanım gereği $AA^{-1} = I$ olduğundan $(AA^{-1})^t = I$ olur. Ama $(AA^{-1})^t = (A^{-1})^tA^t$ olduğundan $(A^{-1})^tA^t = I$ olur. Öte yandan gene tanım gereği $A^{-1}A = I$ ve $(A^{-1}A)^t = I$ yani $A^t(A^{-1})^t = I$ dır. Dolayısı ile $(A^{-1})^tA^t = I = A^t(A^{-1})^t$ dir ve A^t nin tersi $(A^{-1})^t$ dir. iii) A simetrik ise $A = A^t$ dir. Dolayısı ile $A^{-1} = (A^t)^{-1}$ dir. Öyleyse (ii) özelliğinden $A^{-1} = (A^{-1})^t$ dir ve bu da A^{-1} simetrik bir matristir demektir. iv) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ olması için $B^{-1}A^{-1}(AB) = I = (AB)B^{-1}A^{-1}$ olması gerekir. Teorem 2 yi kullanarak $B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$ olduğu gösterilir. Benzer şekilde $I = (AB)B^{-1}A^{-1}$ olduğu da gösterilir.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \sigma & \rho \end{bmatrix}$ aşağıdaki sonuçları (2 x 2) durumu için ispatlayınız:

i. detAB = detAdetB
ii. AB = AC $\Rightarrow$ B = C ancak ve ancak A tekil olmayan bir matristir.
iii. $AB = O_{nn} \Rightarrow B = O_{nn}$ ancak ve ancak A tekil olmayan bir matristir.

3. VEKTÖRLER VE DOĞRUSAL BAĞIMSIZLIK

$A = \{a_1,...., a_n)$ ve $B = \{b_1,...., b_m)$ iki küme olmak üzere A ve B nin kartezyen çarpımının

$$AxB = \{(a, b) \mid a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

olarak tanımlandığını biliyoruz. Buna göre AxB (a, b) sıralı ikililerinden oluşmaktadır. Burada sıra önemlidir. Örneğin A = {1, 2} ve B = {1, 2, 7} ise

$$AxB = \{(1, 1), (1, 2), (1, 7), (2, 1) (2, 2), (2, 7)\}$$

olur. Dolayısı ile (1, 2) ve (2, 1) elemanları farklı elemanlardır çünkü (1, 2) elemanında $1 \in A$, $2 \in B$ iken; (2, 1) elemanında $2 \in A$ ve $1 \in B$ dir. Benzer şekilde R^2 uzayı da

$$R^2 = RxR = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in R \text{ ve } x_2 \in R\}$$

sıralı ikilileri olarak tanımlanır ve elemanlarına **vektör** denir. $x = (x_1, x_2) \in R^2$ vektöründe x_1 ve x_2 ye x in bileşenleri denir. Örneğin (1, 3), (-1, 2), (3, 1), (0.1, -16) R^2 de vektörlerdir. Bu şekliyle vektörlere satır vektörler denir. R^2 nin elemanlarını

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.1 \\ -16 \end{pmatrix}$$

şeklinde sütun vektörler olarak da gösterebiliriz. R^2 de satır vektörleri (1 x 2) "satır" matrisler, sütun vektörleri ise (2 x 1) "sütun" matrisler olarak değerlendirebiliriz. Aslında R^2 uzayı (1 x 2) ve (2 x 1) matris uzayları ile matematiksel açıdan özdeştir. Ama biz gene de satır ve sütun vektör ayrımına dikkat edeceğiz.

Buradan hareketle R^3 (x_1, x_2, x_3) sıralı üçlüleri, yada 3-vektörleri, olarak tanımlanır. Satır vektörler olarak (1, 2, 3), (-1, 0.1, 0) ve (0, 1, 0) R^3 de vektörlerdir. Aynı vektörleri sütun vektörler olarak da

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0.1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

şeklinde gösterebiliriz. Genel olarak R^n $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ya da $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\...\\x_n\end{pmatrix}$ sıralı n-lilerin, ya da n-vektörlerin, kümesi olarak tanımlanır. Örneğin (1, 0, -1, 3) R^4 de, (1, 1, 5, 1, 1) R^5 de vektörlerdir.

Vektörleri uygun mertebeden matrisler olarak düşündüğümüzde bir sonraki tanım kendiliğinden oluşur:

Tanım 11. Vektörlerde skalar çarpım, toplama ve çıkarma

$x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in R^n$ ve $\alpha \in R$ olmak üzere,
i. (skalar çarpım) $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$,
ii. (vektör toplamı) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$,
iii. (çıkarma) $x – y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n)$.

Örneğin x = (1, 2, 3) ve y = (-2, 3, 5) $\in R^3$ olmak üzere
x + y = (1-2, 2+3, 3+5) = (-1, 5, 8),
x – y = (1-(-2), 2-3, 3-5) = (3, -1, -2),
2x = (2.1, 2.2, 2.3) = (2, 4, 6) olur. Aynı şeyi

$$x=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}, x+y=\begin{pmatrix}1-2\\2+3\\3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\\8\end{pmatrix}, x-y=\begin{pmatrix}1+2\\2-3\\3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}, 2x=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$$

olarak da gösterebiliriz. Bir sonraki sonuç da matris işlemlerine dair bilgilerimiz ışığında aşikardır.

Teorem 6. $x, y, z \in R^n$ ve $\alpha, \beta \in R$ olmak üzere vektör işlemleri aşağıdakileri sağlar:
i. $x + y = y + x$, $x – y = -(y – x)$
ii. $x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z$,
iii. $\alpha(x \pm y) = \alpha x \pm \alpha y$,
iv. $(\alpha + \beta)(x + y) = (\alpha + \beta)x + (\alpha + \beta)y = \alpha(x + y) + \beta(x + y)$.

Tanım 12 İç çarpım.

$x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in R^n$ olmak üzere x ve y nin iç çarpımı xy olarak gösterilir ve

$$xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

olarak tanımlanır.

Uyarı: İç çarpım aynı mertebeden vektörler için tanımlıdır. Vektörleri matris olarak düşündüğümüzde iç çarpım iki matrisin çarpımıdır ve bunların çarpım için uyumlu olması gerekir. Bu nedenle x ve y satır vektörlerse iç çarpımı xy^t (y^t y nin devriği); sütun vektörlerse iç çarpımı x^ty olarak yazmamız gerekir ve bazı kitaplar böyle yapar. Biz burada karışıklığa neden olmadığı sürece iç çarpım için xy notasyonunu kullanacağız. Ama bazı durumlarda diğer notasyonları da kullanabiliriz.

Örnek 2. 8.

i. x = (1, 2), y = (2, 5), z = (-2, 1) $\in R^2$ olsun. O halde
xy = 1.2 + 2.5 = 12,
xz = 1.(-2) + 2.1 = 0,
zx = -2.1 + 1.2 = 0,
yx = 2.1 + 5.2 = 12 olur.
Öte yandan 2xy iç çarpımını önce 2x = (2, 4) sonra (2x)y = 24, ya da 2(xy) = 2.12 = 24 ya da x(2y) = x(4, 10) = 1.4 + 2.10 = 24 olarak hesaplayabiliriz.

ii. x = (1, 2, -1), y = (1, 1, 1), z = (1, 0, 1) $\in R^3$ olsun. O halde
xy = 1.1 + 2.1 +(-1).1 = 2,
yx = 1.1 + 1.2 + 1.(-1) = 2,
xz = 1.1 + 2.0 + (-1).1 = 0
yz = 1.1 + 1.0 + 1.1 = 2 olur.
x(y + z) = x(2, 1, 2) = 1.2 + 2.1 + (-1).2 = 2, Burada x(y + z) = xy + xz olduğuna dikkat ediniz. Ayrıca 2(x + y)z = 2xz + 2yz = 2.0 + 2.2 = 4 olacağı da açıktır.

iii. $X \subset R^{n+}$ olsun. Burada R^{n+} bileşenleri negatif olmayan sayılar olan vektörlerin kümesidir. Örneğin (-1, 0, 1) vektörü $\notin R^{3+}$ iken (1, 0, 0) $\in R^{3+}$ dır. Dolayısı ile x = $(x_1, ..., x_n) \in X$ ise $x_1,.., x_n \geq 0$ olan sayılardır. Şimdi bir tüketicinin kullanabileceği mallardan oluşan mal sepetleri düşünelim. Örneğin, (1 birim ekmek, 3 birim peynir, 2 birim yağ, 4 birim giyecek) den oluşan bir mal sepeti olabilir. Açıktır ki bu sepeti (1, 3, 2, 4) olarak R^{4+} da vektör olarak düşünülebiliriz. Burada sıralılık ilişkisinin önemine dikkat ediniz. (x_1, x_2, x_3, x_4) vektörünün (mal sepetinin) birinci bileşeni (x_1) ekmek miktarını, ikinci bileşeni (x_2) peynir miktarını vb. göstermektedir. Dolayısı ile R^{4+} daki her vektör bir mal sepetidir. Şimdi p = (p_1, p_2, p_3, p_4) bir fiyat vektörü olsun. Burada p_1 ekmeğin, p_2 peynirin vb. fiyatı olmaktadır ve bütün fiyatların pozitif olduğunu düşünebiliriz. Bu durumda px iç çarpımı

$$px = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4$$

olmak üzere sepetteki mal miktarlarını, malların fiyatları ile çarparak elde edilen toplamdır ve bir sepetin tüketiciye maliyetidir. Örneğin x = (1, 3, 2, 4) sepetinin p = (1, 1.5, 2, 5) fiyatlarında maliyeti px = 1 + 4.5 + 4 + 20 = 29.5 TLdir. Doğal olarak tüketici $X \subset R^{n+}$ da yer alan her sepeti satın alamaz. Örneğin, 100 TLsi olan bir tüketici p = (1, 1.5, 2, 5) fiyatlarında

x = (1, 1, 1, 20) sepetini alamaz, çünkü px = 104.5 olmaktadır. O zaman M tüketicinin elindeki para miktarını göstermek üzere alabileceği mal sepetleri kümesini

$$B = \{x \in X \mid px \leq M\}$$

olarak gösterebiliriz ki bu da tüketicinin bütçe kümesidir ve tabi olduğu kısıtı, yani $px \leq M$, ifade etmektedir. Dolayısı ile tüketici maliyeti (px) elindeki paradan (M) küçük ya da ona eşit olan sepetleri alabilir. Örneğin M = 100 iken p = (1, 1.5, 2, 5) fiyatlarında x = (1, 1, 1, 20) $\notin$ B iken y = (1, 2, 3, 18) $\in$ B dir. Yani tüketici 100 TL ile bu fiyatlarda 1 birim ekmek, 2 birim peynir, 3 birim yağ ve 18 birim giyecek alabilir (py = 1.1 + (1.5).2 + 2.3 + 5.18 = 100); ama birer birim ekmek, peynir ve yağ ile 20 birim giyecek alamaz.

Teorem 7. x, y, z $\in R^n$ ve α, β $\in$ R olmak üzere iç çarpım işlemi aşağıdakileri sağlar:
i. xy = yx
ii. (αx)y = x(αy) = α(xy)
iii. (x + z)y = xy + xz

Aşağıdaki alıştırmaları yaparak bu teoremin sağlamasını okuyucuya bırakıyoruz.

Tanım 13. Sıfır vektör ve vektör eşitliği.

i. **0** = (0, 0, ..., 0) $\in R^n$ vektörüne, yani bütün bileşenleri sıfır olan vektöre, sıfır vektör denir.

ii. x, y $\in R^n$ için $x_i = y_i$, i = 1, ..., n, ise, yani iki vektörün karşılıklı elemanları eşit ise, x eşittir y dir denir ve x = y olarak gösterilir.

Örneğin (0, 0) R^2 de sıfır vektördür. Açıktır ki her x$\in R^n$ için x + **0** = x = **0** + x ve x**0** = 0 = **0**x olacaktır. İki vektör eşit ise x – y = **0** olacağı da açıktır.

Tanım 14. Doğrusal bileşim.

$x^1, x^2, ..., x^k \in R^n$ olsun. Bu vektörlerin herbirinin $a_i \in$ R katsayıları (skalar) ile çarpılarak toplanmasıyla elde edilen $y = a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_kx^k$ vektörüne $x^1, x^2, ..., x^k$ vektörlerinin doğrusal bileşimi denir.

Buna göre x^1 = (1, 2), x^2 = (0, 1), x^3 = (1, 1) vektörlerinin bir doğrusal bileşimi $2x^1 – x^2 + 3x^3$ = (2, 4) – (0, 1) + (3, 3) = (2-0+3, 4-1+3) = (5, 6) dır. Burada $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_3 = 3$ olmaktadır. Gene, $x^1 - x^2 - x^3$ = (1-0-1, 2-1-1) = (0, 0) da $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = -1$ olmak üzere başka bir doğrusal bileşimdir. Benzer şekilde

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^n \text{ vektörleri ile}$$

$2x - y - z = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_3 = -1$ olmak üzere, ve

$x + y - z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$ olmak üzere, doğrusal bileşimler elde ederiz.

Tanım 15. Doğrusal Bağımsızlık.

$x^1, x^2, ..., x^k \in R^n$ olsun. Eğer $a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_kx^k = \mathbf{0}$ eşitliğini sağlayan en azından bazı $a_i \neq 0$ olacak şekilde $a_i \in R$ sayıları varsa $x^1, x^2, ..., x^k$ vektörleri doğrusal bağımlıdır denir. Aksi durumda, yani $a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_kx^k = \mathbf{0} \Leftrightarrow$ her i için $a_i = 0$ oluyorsa, $x^1, x^2, ..., x^k$ vektörleri doğrusal bağımsızdır denir.

Herhangi bir vektör kümesini sıfır katsayılarla çarpıp toplarsak her zaman sıfır vektörü elde ederiz. Yani, herhangi bir $x^1, x^2, ..., x^k \in R^n$ için $0x^1 + 0x^2 + ... + 0x^k = \mathbf{0}$ olur. Dolayısı ile bir vektör kümesinin doğrusal bağımlı olması için kümenin en azından bazıları sıfırdan farklı olan katsayılarla doğrusal bileşiminin sıfır olması, ya da sıfır vektörünü bu vektörlerin sıfırdan farklı katsayılarla doğrusal bileşimi olarak yazmanın mümkün olması, gerekmektedir. Bir kümenin doğrusal bağımlı olması demek kümeden elde edilecek her doğrusal bileşimin sıfır vektör olması demek değildir. Bazı doğrusal bileşimler sıfırdan farklı olabilir, ama en azından bir tane sıfırdan farklı katsayılarla doğrusal bileşim sıfır vektörüdür. Örneğin, yukarıda ele aldığımız $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^3$ vektörleri için $x + y - z \neq \mathbf{0}$ iken $2x - y - z = \mathbf{0}$ dır ve bu vektörler doğrusal bağımlıdır, çünkü $ax + by + cz = \mathbf{0}$ sağlayan $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$, yani sıfırdan farklı, katsayılar vardır.

Bu tanıma göre sıfır vektörünü sıfırdan farklı katsayılarla doğrusal bağımsız bir $x^1, x^2, ..., x^k$ kümesinin doğrusal bileşimi olarak yazamayız; ya da doğrusal bağımsız bir kümenin sadece bütün katsayıları sıfır olacak şekilde bir doğrusal bileşimi sıfır vektör olur. Örneğin $x = (1, 0)$ $y = (0, 1) \in R^2$ olsun. $ax + by = \mathbf{0}$ olması için

$ax_1 + by_1 = a = 0$
$ax_2 + by_2 = b = 0$

olmalıdır. Dolayısı ile (1, 0) ve (0, 1) vektörleri R^2 de doğrusal bağımsızdır. Bu vektörleri kullanarak sıfırdan farklı katsayılarla sıfır vektörünü bunların doğrusal bileşimi olarak elde edemeyiz.

Örnek 2.9.

i. $x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, x^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in R^2$ olsun.

Burada x^1 ve x^3 vektörleri doğrusal bağımlıdır. Bunun için $ax^1 + bx^3 = \mathbf{0}$ şartını sağlayan sıfırdan farklı a ve b sayıları olduğunu göstermemiz gerekiyor. Şimdi, $ax^1 + bx^3 = \mathbf{0}$ yani a(1, 3) + b(2, 6) = (0, 0) olması için

a + 2b = 0
3a + 6b = 0

olmalıdır. Ama a = -2b şartını sağlayan her a, b bu denklemleri sağlar. Örneğin a = -1, b = 0.5; ya da a = 2, b = -1 gibi. Dolayısı ile **0** vektörünü a ve b sıfırdan farklı olmak üzere x^1 ve x^2 vektörlerinin doğrusal bileşimi olarak yazmak mümkündür ve bu iki vektör R^2 de doğrusal bağımlıdır. Aynı sonucu doğrudan görmek de mümkündür: $x^3 = 2x^1$ dir ve $2x^1 - x^3 = 2(1, 3) – (2, 6) = (2, 6) – (2, 6) = (0, 0)$ olur. Dikkat edileceği gibi iki vektörün doğrusal bağımlı olması demek birinin diğerinin skalar çarpımı olması demektir. Şimdi, düzlemde (0, 0) ve (1, 3) noktasından geçen doğrunun denklemine y = a + bx dersek, bu denklem 0 = a + b0 ve 3 = a + b koşullarını sağlamalı, yani a = 0 ve b = 3 olmalıdır. Dolayısı ile $x^1 = (1, 3)$ vektörü y = 3x doğrusu üzerinde yer alır. Ama $x^3 = (2, 6)$ vektörü de y = 3x doğrusu üzerindedir. İşte doğrusal bağımlılığın anlamı budur. R^2 de iki vektör doğrusal bağımlı ise orijinden geçen bir doğru üzerinde yer alırlar.

Şimdi, x^1 ve x^2 vektörlerini ele alalım. $ax^1 + bx^2 = \mathbf{0}$ olacaksa, a(1, 3) + b(-1, 2) = (0, 0), yani

a – b = 0
3a + 2b = 0

olmalıdır. İlk denklemden a = b, bunu ikinci de yerine koyunca da 5a = 0, dolayısı ile a = b = 0 olur. Sıfır vektörünü bu iki vektörün sıfırdan farklı katsayılarla doğrusal bileşimi olarak yazamıyoruz ve bu iki vektör doğrusal bağımsızdır. Bu iki vektör orjinden geçen aynı doğru üzerinde yer almaz. x^1 vektörünün y = 3x doğrusu üzerinde yer aldığını biliyoruz. $x^2 = (-1, 2)$ vektörü bu doğru üzerinde yer almaz çünkü $2 \neq 3.(-1)$ dir.

Benzer şekilde x^1 ve x^4 vektörleri de doğrusal bağımsızdır. Çünkü $ax^1 + bx^4 = \mathbf{0}$ olması için

a + b = 0
3a – b = 0

olmalıdır ve bu şartları da ancak a = b = 0 sağlar.

Şimdi x^1, x^2 ve x^4 vektörlerini ele alalım. Bu vektörler çiftler halinde doğrusal bağımsızdır ve biz üçünün bir doğrusal bağımsız küme oluşturup oluşturmadığına bakmak istiyoruz. $ax^1 + bx^2 + cx^4 = \mathbf{0}$ olması için

a – b + c = 0
3a + 2b – c = 0

olmalıdır. Bu da –a + b = 3a + 2b, ya da 4a + b = 0 ve c = b – a, şartını sağlayan her a, b, c değeri için doğrudur. Örneğin, a = 1 koyarsak, b = -4 ve c = -5 olur. Gerçekten de

$x^1 - 4x^2 - 5x^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4-5 \\ 3-8+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ olmaktadır. Yani çiftler halinde doğrusal bağımsız olmalarına rağmen bu üç vektör beraberce doğrusal bağımlıdır. R^2 de üç vektörün doğrusal bağımlı olmasının anlamına dikkat ediniz. Bu vektörler $x^1 - 4bx^2 - 5x^4 = \mathbf{0}$ şartını sağlamaktadır. Dolayısı ile $x^1 = 4x^2 + 5x^4$, yani vektörlerden birini diğer ikisinin doğrusal bileşimi olarak, yazabiliriz.

ii. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in R^3$ olsun.

Burada x ve y doğrusal bağımsızdır. Çünkü

$ax + by = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ olması için

a – 2b = 0
2a + 3b = 0
3a + 5b = 0

olmalıdır. İlk denklemden a = 2b olması gerektiği için bu üç denklemin sadece a = b = 0 için sağlanacağı açıktır. Dolayısı ile x ve y vektörlerini kullanarak sıfır vektörünü sıfırdan farklı katsayılarla elde etmek mümkün değildir ve vektörler R^3 de doğrusal bağımsızdır.

Benzer şekilde y ve z vektörleri de doğrusal bağımsızdır. Çünkü ay + bz = **0** olması için

-2a + 4b = 0
3a + b = 0
5a + b = 0

olmalıdır. Bu da 3a = 5a yani a = 0 ve dolayısı ile b = 0 demektir. Yani ay + bz = **0** eşitliği ancak ve ancak a = b = 0 için sağlanmaktadır ve iki vektör R^3 de doğrusal bağımsızdır.

Öte yandan z ve v vektörleri doğrusal bağımlıdır. Çünkü, v = -z dir ve z + v = **0** olacağı açıktır. R^2 de olduğu gibi R^3 de de iki vektör doğrusal bağımlı iseler biri diğerinin skalar katıdır. Yani iki vektör orijinden geçen aynı doğru üzerindedir.

x, y ve z vektörleri çiftler halinde doğrusal bağımsız oldukları halde (x ve z nin doğrusal bağımsız olduğunu gösteriniz) üç vektör birlikte doğrusal bağımlıdır. Örneğin, okuyucunun sağlaması gerektiği gibi, 2x – y – z = **0** olmaktadır. Bu durumda z = 2x – y, yani vektörlerden birini diğer ikisinin doğrusal bileşimi olarak, yazabiliriz.

iii. $e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^2$ vektörlerinin R^2 de doğrusal bağımsız olduğunu daha önce görmüştük. Şimdi herhangi bir $x = (x_1, x_2) \in R^2$ vektörünü $x = x_1e^1 + x_2e^2$ olacak şekilde e^1 ve e^2 nin doğrusal bileşimi olarak yazabileceğimiz açıktır. Örneğin, x = (-1, 5) vektörü $-e^1 + 5e^2$ olacaktır. Dolayısı ile $\{ e^1, e^2, x\} \subset R^2$ kümesi her $x \in R^2$ için doğrusal bağımlıdır. Çünkü, $x = x_1e^1 + x_2e^2$ dir ve $-x + x_1e^1 + x_2e^2 = \mathbf{0}$ olur. Örneğin x = (2, 7) vektörünü ele alırsak $x - 2e^1 - 7e^2 = \mathbf{0}$ dır. Yani, $ax + be^1 + ce^2 = \mathbf{0}$ olacak şekilde sıfırdan farklı a, b, c sayıları vardır.

iv. R^2 de herhangi üç vektör doğrusal bağımlıdır. Yani, $x, y, z \in R^2$ ise $ax + by + cz = \mathbf{0}$ eşitliğini sağlayacak şekilde üçü birden sıfır olmayan a, b, c sayıları vardır. Öncelikle x, y ve z vektörlerinden birisi sıfır vektörse bu önerme doğrudur. Üç vektörün herhangi ikisi doğrusal bağımlıysa da önerme doğrudur. (Neden?) Dolayısı x, y ve z nin sıfırdan farklı, çiftler halinde doğrusal bağımsız vektörler olduğunu varsayalım. O halde

$a(x_1, x_2) + b(y_1, y_2) + c(z_1, z_2) = (0, 0, 0)$ için

$ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$
$ax_2 + by_2 + cz_2 = 0$

olmalıdır. Şimdi, $x_2 \neq 0$ olmak üzere, ikinci denklemden, $a = -(by_2 + cz_2)/x_2$ oradan da ilk denklemde a'yı yerine koyarak:

$$b(y_1 - \frac{y_2x_1}{x_2}) + c(z_1 - \frac{z_2x_1}{x_2}) = 0 \qquad \text{(i)}$$

elde ederiz. Parantez içindeki ifadeler sıfırdan farklıdır, çünkü x-y ve x-z vektörleri doğrusal bağımsızdır. Eğer, $y_1 - (y_2x_1)/x_2 = 0$ ise $y_1x_2 = y_2x_1$ olur. Ama o zaman $x = \alpha y$ olacak şekilde x y'nin skalar katıdır ve x ile y doğrusal bağımlı olur. Örneğin x = (1, 2) ve y = (3, 6) ise $y_1x_2 = 3.2 = y_2x_1 = 6.1$ olur. Dolayısı ile (i) denkleminde b ve c'nin katsayıları sıfırdan farklıdır ve denklem ancak sıfırdan farklı b ve c değerleri için sağlanabilir. O halde a, b, c sayılarının en azından ikisi sıfırdan farklıdır ve herhangi $x, y, z \in R^2$ vektörleri R^2 de doğrusal bağımlıdır.

v. $e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \in R^3$ olsun. Bu üç vektör R^3 de doğrusal bağımsızdır. Çünkü, $ae^1 + be^2 + ce^3 = \mathbf{0}$ demek a = 0, b = 0 ve c = 0 demektir. Şimdi, herhangi bir $v = (v_1, v_2, v_3) \in R^3$ olsun. Açıktır ki

$v = v_1e^1 + v_2e^2 + v_3e^3$

olacaktır. Yani R^3 de herhangi bir vektörü e^1, e^2 ve e^3 ün doğrusal bileşimi olarak yazabiliriz ve bileşimin katsayıları vektörün bileşenleridir. Örneğin, v = (1, -1, 3) vektörü $v = e^1 - e^2 + 3e^3$ olacaktır. Bu da $\{ e^1, e^2, e^3, v\} \subset R^3$ kümesinin her $v \in R^3$ için doğrusal bağımlı olması demektir. Çünkü, her $v \in R^3$ için $v = v_1e^1 + v_2e^2 + v_3e^3$ dir ve $-v + v_1e^1 + v_2e^2 + v_3e^3 = \mathbf{0}$ olur.

Theorem 7.

i. R^n de en fazla n doğrusal bağımsız vektör vardır: k > n vektörden oluşan her vektör kümesi doğrusal bağımlıdır.

ii. $x^1, x^2, ..., x^k$ vektörleri ancak ve ancak biri diğerlerinin doğrusal bileşimi ise doğrusal bağımlıdır.

iii. $S = \{x^1, x^2, ..., x^k\} \subset R^n$ olsun.

a) Eğer S doğrusal bağımsız ise S nin her altkümesi de doğrusal bağımsızdır.

b) Eğer S nin doğrusal bağımlı bir altkümesi varsa S de doğrusal bağımlıdır.

Uyarı: Böylece doğrusal bağımsız bir vektör kümesinde bir vektörü diğerlerinin doğrusal bileşimi olarak yazamayacağımız anlaşılmaktadır. Yani, $x^1, x^2, ..., x^k \in R^n$ doğrusal bağımsız ise, diyelim, $x^1 = a_2x^2 + ... + a_kx^k$ olacak şekilde a_i katsayıları yoktur.

Bu teoremin önemli bir sonucu R^n de n doğrusal bağımsız vektörden oluşan herhangi bir $\{v^1, ..., v^n\}$ kümesini kullanarak herhangi bir $x \in R^n$ vektörünü $x = a_1v^1 + ... + a_nv^n$ olarak ifade edebileceğimizdir. Çünkü $\{x, v^1, ..., v^n\}$ kümesi n+1 vektörden oluşur ve Teorem 7 (i) uyarınca doğrusal bağımlıdır, Teorem 7 (ii) ye göre de biri diğerlerinin doğrusal bileşimidir ve $\{v^1, ..., v^n\}$ kümesi doğrusal bağımsız olduğuna göre x'i bunların doğrusal bileşimi olarak yazılabiliriz. Dolayısı ile $L(v) = \{x \mid x = a_1v^1 + ... + a_nv^n, a_i \in R\}$ kümesi, yani v^i vektörlerinin bütün doğrusal bileşimlerinin kümesi, R^n e eşittirir. İşte $L(v) = R^n$ olan bir doğrusal bağımsız $\{v^1, ..., v^n\}$ kümesine **R^n nin tabanı**, tabandaki vektör sayısına da **R^n in boyutu** denir. Teorem 7 (i) ye göre R^n in boyutu n dir. Yani n doğrusal bağımsız vektörden oluşan her küme R^n nin bir tabanıdır, R^n in her tabanı n doğrusal bağımsız vektörden oluşur. Buna göre

$e^1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e^2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in R^2$ vektörleri R^2 nin bir tabanıdır ve buna R^2 nin standart tabanı diyoruz.

Dolayısı ile $x = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in R^2$ vektörün $\{e^1, e^2\}$ tabanına göre ifade edilmiş biçimidir.

$x = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in R^2$ demek $x = e^1 + e^2$ demektir. Normal olarak vektörleri $\{e^1, e^2\}$ tabanına göre ifade ediyoruz ve alışageldiğimiz durum budur. Ama $x^1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, e^2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in R^2$ vektörleri de R^2 nin başka bir tabanıdır ve $x = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in R^2$ vektörünün bu tabana göre bileşenleri (1, 0) dır yani x = $1x^1 + 0e^2$ dir. Benzer şekilde $e^1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e^2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e^3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \in R^3$ vektörleri de R^3 ün standart

tabanıdır ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3$ demek x = $x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3$ demektir. Ama R^3 de herhangi üç doğrusal bağımsız vektörden oluşan küme de bir tabandır.

4. BİR MATRİSİN RANKI VE MATRİS CEBİRİNİN TEMEL TEOREMİ

Şimdi bir A (n x m) matrisini ele alalım:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}.....a_{1m} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}.....a_{2m} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}.....a_{3m} \\ ..... \\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}.....a_{nm} \end{bmatrix}$$

Matrisin her satırını $a^i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}) \in R^m$ olarak yani R^m de bir vektör olarak düşünebiliriz ve A nın n satırı vardır. R^m de en fazla m sayıda doğrusal bağımsız vektör olabileceğine göre A nın doğrusal bağımsız satır sayısı ≤ min(n, m), yani n ve m den küçük olanı, kadar ya da daha az olabilir. Örneğin, (3 x 5) bir matriste satırlar R^5 de vektörlerdir ve 3 satır vardır. min(3, 5) = 3 olduğuna göre en fazla 3 doğrusal bağımsız satır olabilir. Yani ya üç satır doğrusal bağımsızdır, ya sadece ikisi doğrusal bağımsızdır, ya da doğrusal bağımsız bir satır vardır. Öte yandan, (5 x 3) bir matriste satırlar R^3 de vektörlerdir ve beş satır vardır. Dolayısı ile R^3 de en fazla 3 doğrusal bağımsız vektör olabileceğine göre—ki min(5, 3) = 3 dür— beş satırın en fazla üçü doğrusal bağımsız olabilir.

Örneğin $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (3, 4) matrisinin satırları a^1 = (1, 1, 1, 1), a^2 = (2, 2, 0, 1) ve a^3 = (3, 3, 1, 2) olmak üzere R^4 de vektörlerdir ve min(3, 4) = 3 olduğundan bu matrisin en fazla üç doğrusal bağımsız satırı olabilir. Burada $a^3 = a^1 + a^2$ olduğundan, yani vektörlerden biri diğerlerinin doğrusal bileşimi olduğundan, A nın satırları doğrusal bağımlıdır. Bu durumda A nın doğrusal bağımsız iki satırı vardır: satırlar çiftler halinde doğrusal bağımsızdır.

Benzer şekilde matrisin her sütununu $A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ .... \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in R^n$ olmak üzere R^n de vektörler olarak düşünebiliriz. Satırlar için olduğu gibi A nın doğrusal bağımsız sütun sayısı da ≤ min(n, m) dir. Örneğin, (3 x 5) bir matriste sütunlar R^3 de vektörlerdir ve beş sütun vardır. R^3 de en fazla

üç doğrusal bağımsız vektör olabilir ve min(3, 5) = 3 dür. Gene $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisini ele alırsak, sütünlar $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in R^3$ dir. Bu dört vektör R^3 de doğrusal bağımlı olmak zorundadır. A nın en fazla 3 doğrusal bağımsız sütunu olabilir. Ama sütunlar üçerli guruplar halinde doğrusal bağımlıdır. Yani $\{A_1, A_2, A_3\}$, $\{A_1, A_2, A_4\}$, $\{A_1, A_3, A_4\}$, $\{A_2, A_3, A_4\}$ kümelerinin hepsi doğrusal bağımlıdır (Gösteriniz!). Dolayısı ile A nın sadece iki doğrusal bağımsız sütunu vardır. Örneğin, $\{A_3, A_4\}$ doğrusal bağımsızdır (biri diğerinin katı değildir).

Bu örnek genel bir doğrunun ifadesidir:

Tanım 16. Bir Matrisin Rankı.

A, (n x m) bir matris olsun. A nın doğrusal bağımsız satır ve sütun sayısı aynıdır ve bu müşterek sayıya A nın rankı denir, r(A) olarak gösterilir. r(A) ≤ min(n, m) dir.

Örneğin, yukarıda ele aldığımız $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi için r(A) = 2 dir. Bu matrisin iki doğrusal bağımsız satırı ve sütunu vardır.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi için r(A) = 3 dür. Yani bu (3 x 3) matrisin satırları ve sütunları kendi aralarında doğrusal bağımsızdır. Matrisin determinantının sıfırdan farklı olduğuna dikkat ediniz.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ise, açık olduğu üzere r(A) = 1 dir. Matrisin satırları ve sütunları doğrusal bağımlıdır ve detA = 0 dır. Ama $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matris için r(A) = 2 dir, detA = -1 ≠ 0 dır.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ise, r(A) = 2 < 3 dür, det A = 0 dır.

Şimdi, Teorem 3 ün (v) önermesi bir (n x n) matris için

- A nın bir satırı (sütunu) bir sayı ile çarpılıp başka bir satıra (sütuna) eklenmesi veya çıkarılmasıyla elde edilen matrisin determinantı detA ile aynıdır

demektedir. O halde A, (n x n) matrisin diyelim ilk iki sütunu (ya da satırı) doğrusal bağımlı, yani $A_1 = \alpha A_2$, olsun (R^n de iki vektörün doğrusal bağımlı olmasının birinin diğerinin skalar

katı olduğu demek olduğunu hatırlayınız). O halde ikinci sütunu α ile çarpıp birinciden çıkarırsak $A_1 - \alpha A_2 = \mathbf{0}$ elde ederiz, yani yeni matrisin ilk sütunu sıfır vektör olur ve bu matrisin, dolayısı ile de A nın, determinantı sıfır olur. Genel olarak A nın sütunları (satırları) doğrusal bağımlıysa $a_1A_1 + a_2A_2 + ... + a_nA_n = \mathbf{0}$ demektir ve $A_1 = c_2A_2 + ... + c_nA_n$ yazılabilir. O halde, A nın diğer sütunlarını uygun c_i sayılarıyla çarpıp birinci sütundan çıkarırsak ilk sütunu sıfır olan bir matris elde ederiz ve detA = 0 olur. Özetle, bir matrisin sütunları (satırları) doğrusal bağımlı ise, yani r(A) < n ise, detA = 0 dır. Bunun tersi de doğrudur, yani detA = 0 ise matrisin satırları (sütunları) doğrusal bağımlı olmalıdır ve r(A) < n dir. Dolayısı ile detA ≠ 0 ise matrisin satır ve sütunları doğrusal bağımsız yani r(A) = n olmalıdır.

Bu sonuçları **matris cebirinin temel teoremi** dediğimiz şu teoremde topluyoruz:

Teorem 8. A (n x n) kare matris olsun. Aşağıdaki önermeler özdeştir:
i. detA ≠ 0,

ii. A tekil olmayan bir matristir (A^{-1} vardır),

iii. Herhangi B, C (n x m) matrisler için, AB = AC ⇔ B = C,

iv. X (n x m) olmak üzere $AX = 0_{nm} \Leftrightarrow X = 0_{nm}$,

v. r(A) = n (A nın rankı tamdır),

vi. A nın satır ve sütunları doğrusal bağımsızdır.

Uyarı:
1. "Aşağıdaki önermeler özdeştir" biçimindeki ifade bu önermelerden biri geçerliyse hepsi geçerlidir, biri geçerli olmazsa hiç biri olmaz demektir. Öyleyse,
- det A = 0,
- A tekil bir matristir (A^{-1} yoktur),
- AB = AC olması B = C olmasını gerektirmez,
- $AX = 0_{nm}$ olması $X = 0_{nm}$ olmasını gerektirmez,
- r(A) < n,
- A nın satır ve sütunları doğrusal bağımlıdır

önermeleri de özdeştir. Dolayısı ile bu teorem tekil ve tekil olmayan matrislerin tam nitelemesini vermektedir.
2. (iii) ve (iv) önermeleri (ii) nin sonucudur. Örneğin, eğer A^{-1} varsa AB = AC eşitliğinin iki tarafını soldan A^{-1} çarparsak $A^{-1}AB = A^{-1}AC \Rightarrow IB = IC$, yani B = C olur.

Bu teoremin bir kullanımı matrislerin rankınının hesaplanması ve bir vektör kümesinin doğrusal bağımsız olup olmadığının belirlenmesidir.
- R^n de $\{x^1, x^2, ..., x^n\}$ vektörlerinin doğrusal bağımlı olup olmadığına bakmak için bu vektörleri sütunlar halinde yazıp (n x n) bir matris (A) oluşturur, determinantına bakarız. Teorem 8'e göre eğer detA ≠ 0 ise matrisin sütunları, yani $\{x^1, x^2, ..., x^n\}$ vektörleri, doğrusal bağımsızdır. Eğer detA = 0 ise vektörler doğrusal bağımlıdır.
- R^n de $\{x^1, x^2, ..., x^k\}$ k ≠ n vektörlerinin doğrusal bağımlı olup olmadığına bakmak için bu vektörleri sütunlar halinde yazıp (n x k) bir matris (A) oluştururuz. Bu matris kare matris olmadığı için determinantı yoktur. Ama r(A) yı, dolayısı ile matrisin sütunlarından (x^i lerden) kaçının doğrusal bağımsız olduğunu bulabiliriz. Bunu yapmak için A dan k > n ise (n x n), n > k ise (k x k) altmatrisler oluşturur bunların determinantına bakarız. Örneğin, k > n ise zaten bu vektörlerin hepsi birden doğrusal

bağımsız olamaz (R^n de en fazla n doğrusal bağımsız vektör olabilir). Dolayısı ile eğer oluşturulan (n x n) altmatrislerden birinin determinantı sıfırdan farklıysa r(A) = n olur ve bu altmatrisi oluşturan n vektör doğrusal bağımsızdır.

- Bir matrisin (A) rankına bakarken de aynı yolu izliyoruz. Eğer matris (n xn) kare matris ve detA $\neq$ 0 ise r(A) = n dir. detA = 0 ise r(A) < n dir. O halde (n –1 x n –1) altmatrisler oluşturup bunların determinantına bakıyoruz. Eğer determinantı sıfırdan farklı bir (n –1 x n –1) altmatris varsa r(A) = n – 1 dir. Aksi halde (n –2 x n –2) alt matrislerin determinantına, yani r(A) = n – 2 olup olmadığına, bakarak devam ediyoruz. Eğer matris (n x k) ise oluşabilecek en yüksek mertebeden altmatrislerin (bu ya (n x n) ya da (k x k) olur) determinantlarına bakarak ilerliyoruz.

Örnek 10.

i. $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in R^2$ vektörlerinin doğrusal bağımsız olup olmadığını anlamak için bu vektörlerin sütunları olduğu matrisin, yani $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ nın, determinantına bakıyoruz.

Teorem 8 e göre matrisin sütunları doğrusal bağımsızsa detA $\neq$ 0 olmalıdır. Burada detA = 3 olduğu için bu vektörler doğrusal bağımsızdır, r(A) = 2 dir.

ii. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^3$ vektörlerini sütun olarak yazarak $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ elde ederiz. detA = 33 olduğuna göre r(A) = 3 dür: bu matrisin sütunları, yani söz konusu üç vektör, doğrusal bağımsızdır.

iii. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in R^3$ vektörlerini sütun olarak yazarsak $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ elde ederiz. Bu matris kare olmadığı için ancak (2 x 2) altmatrislerin determinantına bakabiliriz. Bu işlem satırların R^2 de doğrusal bağımsız olup olmadığına bakmak demektir. Örneğin, $\det\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 5$ olduğu için r(A) = 2 dir ve matrisin iki doğrusal bağımsız satırı ve sütunu vardır. Bu iki vektör doğrusal bağımsızdır.

iv. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^3$ vektörlerini sütun olarak yazarak $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ elde ederiz ve detA = 0, r(A) < 3 dür. Demek ki A nın sütunları (ve satırları), yani x, y, z vektörleri, doğrusal bağımlıdır. O halde r(A) = 2, yani iki doğrusal bağımsız satır ya da sütun, olup olmadığına bakmak gerekiyor. Bunu yapmak için de A dan elde edilebilecek (2 x 2) altmatrislerin determinantlarına, yani A nın minörlerine, bakıyoruz. Eğer sıfırdan farklı bir

minör varsa r(A) = 2 dir. Burada, örneğin $\det\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix} = 4$ olduğu için r(A) = 2 dir. Bu altmatris x ve y vektörlerinin bileşenlerinden oluştuğu için x ve y doğrusal bağımsızdır. Benzer şekilde $\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix} = -1$ olduğu için de x ve z vektörleri doğrusal bağımsızdır. Bu üç vektör çiftler halinde doğrusal bağımsızdır.

iv. $x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix} \in R^3$ vektörlerini sütun olarak yazarak $A = \begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 6\\ 3 & -6 & 9\end{bmatrix}$ elde ederiz ve detA = 0, r(A) < 3 dür. Şimdi, A nın bütün minörleri sıfırdır, dolayısı ile r(A) < 2 dir. O halde r(A) = 1 olmalıdır ve zaten vektörlere bakıldığında y = -2x, z = 3x, z = -1.5y olduğu açıktır. Yani bu üç vektörün sadece bir tanesi doğrusal bağımsızdır.

v. $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ matrisinin rankını hesaplayalım. Matris kare matris olmadığı için determinantı tanımlı değildir. Ama A nın rankı en fazla min(3, 4) = 3 olabilir. Dolayısı ile A dan elde edilebilecek (3 x 3) kare matrislerin determinantlarına bakmak gerekiyor. Bu A nın sütunlarının üçerli guruplar halinde R^3 de doğrusal bağımlı olup olmadığına bakmak demektir. Eğer bunlardan biri sıfırdan farklıysa r(A) = 3 dür. Yok hepsi sıfırsa, (2 x 2) altmatrislerin determinantlarına bakarız. Eğer bunlardan biri sıfırdan farklıysa r(A) = 2 dir. Bunların hepsi sıfırsa r(A) = 1 demektir. Burada örneğin $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ altmatrisinin determinantı = 1 olup sıfırdan farklıdır. O halde r(A) = 3 dür. A nın satırları R^4 de doğrusal bağımsızdır, ve dört sütunun üçü R^3 de doğrusal bağımsızdır (zaten R^3 de dört doğrusal bağımsız vektör olamaz).

vi. $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ matrisinin rankını hesaplayalım. A dan elde edilecek bütün (3 x 3) altmatrislerin determinantı sıfırdır (çünkü hepsinin ilk iki satırı aynıdır). Dolayısı ile r(A) < 3 dür. Ama, örneğin $\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = -1$ olduğu için, yani bir tane sıfırdan farklı (2 x 2) determinant olduğu için, r(A) = 2 dir. A nın sadece iki doğrusal bağımsız satırı (son ikisi) ve sütunu vardır.

Bazı kitaplar bir matrisin rankını o matristen elde edilebilecek en yüksek mertebeden sıfırdan farklı determinantın mertebesi olarak tanımlar. Yukarıdaki örneklerden görüldüğü gibi bu tanım burada verilen tanıma özdeştir.