3. TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA SÜREKLİLİK ve TÜREV

Genel olarak matematikte, özel olarak da matematiksel iktisatta, fonksiyonlar üzerine konulan en önemli kısıtlama sürekliliktir. Kabaca, bir fonksiyon tanımlı olduğu bir x_o noktasında sürekli ise x, x_o a yakın değerler aldığında f(x) de $f(x_o)$ a yakın değerler alır demektir. Başka bir anlatımla f(x) x_o cıvarında "sıçrama" yapmaz, davranışı "öngörülebilirdir." Bu bölümde bu kavramı formel hale getirip, sürekli fonksiyonların özelliklerine bakacağız.

3. 1 SÜREKLİLİK

Sürekliliği tanımlamak için önce "yakınlık" kavramını tanımlamak gerekmektedir.

Tanım 3.1. Uzaklık fonksiyonu ve açık komşuluk.

i. **(uzaklık fonksiyonu)** Her $x, y \in R$ için x ile y arasındaki uzaklık $d(x, y) = |x - y|$ olmak üzere reel değerli bir fonksiyondur ve

a. $x, y \in R$ için $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$,

b. $x, y \in R$ için $d(x, y) = d(y, x)$,

c. $x, y, z \in R$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (üçgen eşitsizliği).

özelliklerini sağlar.

ii. **(açık komşuluk)** $B(x_o, \varepsilon) = \{x \in R \mid d(x, x_o) < \varepsilon\} = (x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon)$, yani bir $x_o \in R$ sayısına ε'dan daha yakın olan noktalar, kümesine x_o'ın ε–açık komşuluğu denir.

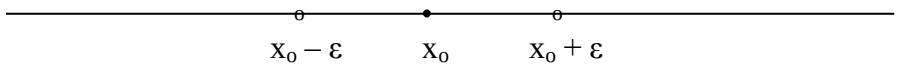
Uzaklık fonksiyonunun özellikleri mutlak değer fonksiyonunun özelliklerinden kaynaklanır.

Bilindiği gibi $|x| = \begin{cases} x, x > 0 \\ 0, \ x = 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$ olarak tanımlanır ve

$|x - y| \geq 0$, $|x - y| = 0$ ancak ve ancak $x = y$,
$|x - y| = |y - x|$
$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$

özelliklerini sağlar. Dolayısı ile reel sayılar için iki sayı arasındaki uzaklık iki sayının farkının mutlak değeri olarak tanımlanır ama biz d(x, y) notasyonunu kullanacağız. Böylece, $d(-3, 3) = |-3 - 3| = 6$, $d(0, 1) = 1$, $d(0, -1) = 1$, $d(2, 5) = 3 = d(5, 2)$ olacaktır. Her $x \in R$ için $d(x, 0) = |x|$ olduğuna dikkat ediniz.

Öte yandan $B(x_o, \varepsilon)$ kümesi reel sayılarda x_o merkezli, ε çaplı açık aralıktır. Yani $B(x_o, \varepsilon) = (x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon)$ dır,



ve $B(x_o, \varepsilon)$, $x_o - \varepsilon$ sayısından büyük, $x_o + \varepsilon$ sayısından küçük reel sayılar kümesidir. Örneğin, $B(5, 0.5) = (5 - 0.5, 5 + 0.5) = (4.5, 5.5)$ olur. Dolayısı ile $B(5, 0.5)$, 4.5 den büyük 5.5 den küçük reel sayılar kümesidir ve her $x \in B(5, 0.5)$ için $d(x, 5) < 0.5$ olacağı açıktır.

Tanım 3.2. Sürekli fonksiyonlar.

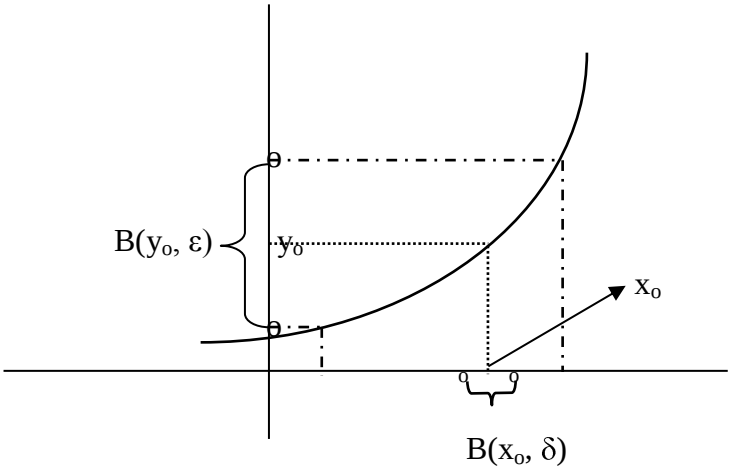
$f: D \subseteq R \to R$ ve $x_o \in D$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$x \in B(x_o, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_o), \varepsilon)$$

ya da özdeş olarak

$$d(x_o, x) < \delta \Rightarrow d(f(x_o), f(x)) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $f(x)$ x_o noktasında süreklidir denir. Eğer fonksiyon D nin her noktasında sürekli ise D üzerinde süreklidir denir. $f(x)$ x_o noktasında sürekli değilse, o noktada süreksizdir denir.



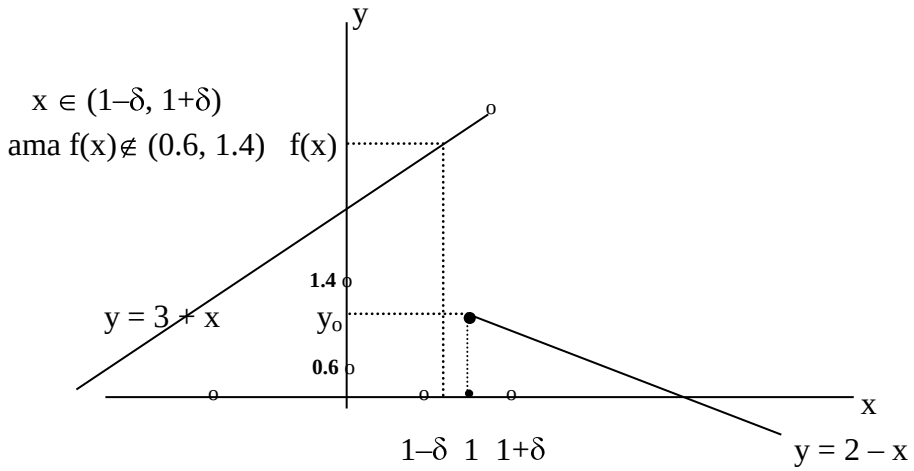
Şekil 3.1. Sürekli Fonksiyon

Tanım Şekil 3.1. yardımıyla açıklanabilir. $y = f(x)$ ve $y_o = f(x_o)$ olsun. $B(y_o, \varepsilon) = (y_o - \varepsilon, y_o + \varepsilon)$, y_o merkezli herhangi bir açık aralık olsun. Şekilde uygun bir $\delta > 0$ seçimiyle oluşturulan bir $B(x_o, \delta)$ gösterilmiştir. Her $x \in B(x_o, \delta)$ için bir $y = f(x) \in B(y_o, \varepsilon)$ olur.

Şimdi Şekil 3.2' yi inceleyelim. Buradaki $f(x)$ fonksiyonu

$$x < 1 \text{ için } y = 3 + x$$
$$x \geq 1 \text{ için } y = 2 - x$$

olmak üzere iki parçalıdır ve $x_o = 1$ olduğunda $y_o = f(x_o) = 2 - 1 = 1$ olur. $\varepsilon = 0.4$ olmak üzere y_o merkezli açık aralığı, yani $B(y_o, 0.4) = (0.6, 1.4)$'u, ele alalım.



Şekil 3.2. Bir Noktada Süreksiz Fonksiyon

Fonksiyon $x_o = 1$ noktasında sürekli değildir. Çünkü, her $\delta > 0$ için $B(x_o, \delta) = (x_o - \delta, x_o + \delta) = (1 - \delta, 1 + \delta)$ görüntüsü (0.6, 1.4) aralığında olmayan noktalar içerecektir. Örneğin, $\delta = 0.1$ için $0.95 \in B(x_o, \delta) = (0.9, 1.1)$ olur ve $f(0.95) = 3 + 0.95 = 3.95 \notin (0.6, 1.4)$ dır. Dolayısı ile sürekliliğin tanımı gereği her $\varepsilon > 0$ için

$$x \in B(x_o, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_o), \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulamıyoruz. Burada açık olduğu üzere fonksiyon $x_o = 1$ noktasında "sıçrama" yapmaktadır: $x_o = 1$ noktasının hemen solundaki noktalarda fonksiyon değeri $y = 3 + x$ olmak üzere 4 e yaklaşırken, x_o noktasında $y = 2 - x = 1$ olmaktadır.

Örnek 3.1.

i. $f: R \to R$, $y = f(x) = a + bx$ olsun. Bu fonksiyon her $x \in R$ noktasında süreklidir. Şöyle ki, herhangi bir $x_o \in R$ noktasında $y_o = f(x_o) = a + bx_o$ olduğuna göre her $y \in B(y_o, \varepsilon)$ için

$$d(y, y_o) = |a + bx - (a + bx_o)| = |b|\,|x - x_o| = |b|\,d(x, x_o)$$

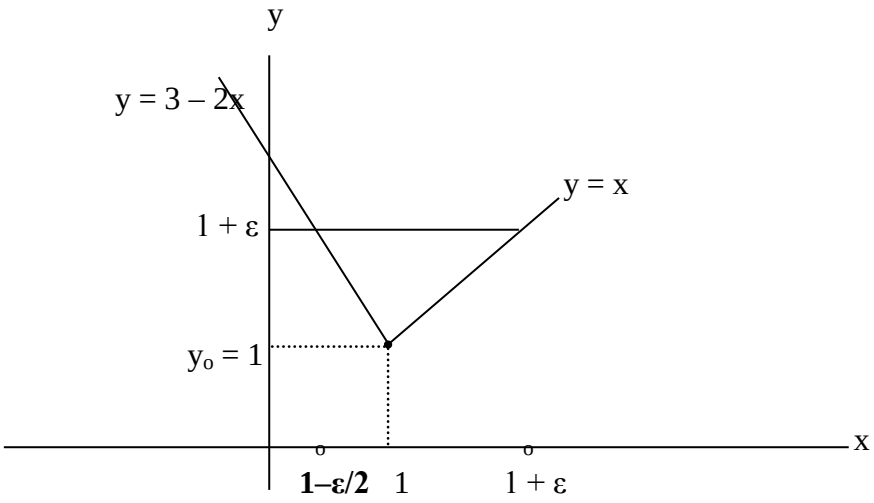
olduğuna göre her $\varepsilon > 0$ için $\delta = \varepsilon/|b|$ koyarsak

$$d(x_o, x) < \delta \Rightarrow d(y_o, y) < \varepsilon$$

olur.

ii. $y = \begin{cases} 3 - 2x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$ fonksiyonu her noktada süreklidir. Burada sorunlu olan $x_o = 1$ noktasıdır. Diğer noktalarda (i) örneğinden bildiğimiz üzere fonksiyon süreklidir. Fonksiyonun $x_o = 1$

noktasındaki değeri $y_o = y(1) = 1$ dir. Her $\varepsilon > 0$ için $B(y_o, \varepsilon) = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ olur. Bu kümenin ters görüntüsü $(1 - \varepsilon/2, 1 + \varepsilon)$ aralığıdır (aşağıdaki şekli inceleyiniz). O halde $\delta = \varepsilon/2$ koyarsak $x \in B(x_o - \delta, x_o + \delta) = (1 - \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2) \Rightarrow f(x) \in B(y_o, \varepsilon)$ olur. Yani fonksiyon $x = 1$ noktasında da süreklidir.



İktisadi uygulamalarda karşımıza çıkabilecek fonksiyonların hemen hepsi süreklidir ve biz her seferinde fonksiyonların sürekliliğini göstermek durumunda değiliz. Aşağıdaki tabloda standart bazı sürekli fonksiyonlar gösterilmiştir.

Tablo 3.1. Bazı Sürekli Fonksiyonlar

Tanım Aralığı	y = f(x)
$x \in R$, $a, b \in R$, $t \neq -1 \in R$	$y = a + bx^t$
$x \neq 0 \in R$, $a, b \in R$, $t = -1$	
$x > 0$	$y = \ln x$
$x \in R$, $a \in R$ (e = 2.718281... irrasyonel sayısı)	$y = ae^x$
$x \in R$, $a, b \in R$	$y = ba^x$
$x \in R$	$y = \sin x$
$x \in R$	$y = \cos x$

Bu tablodaki fonksiyonlar bir sonraki teoremle birlikte ele alındığında birçok fonksiyonun sürekli olduğunu gösterebiliriz.

Teorem 3.1. f: $D \subseteq R \to R$ sürekli fonksiyonların kümesine C diyelim. Bütün f, g $\in$ C ve α, $\beta \in R$ için:
i. αf süreklidir ($\alpha f \in C$ dir).
ii. $(\alpha f + \beta g) \in C$ dir.
iii. $f.g \in C$ dir.
iv. $g(x) \neq 0$ olmak üzere $f/g \in C$ dir.
v. $(g \circ f) \in C$ dir.

Uyarı: $(\alpha f + \beta g) \in C$ olduğuna göre $\alpha = 1$, $\beta = -1$ koyarsak $f - g \in C$, yani sürekli olmalıdır.

Buna göre sürekli fonksiyonların skalar katları, toplamları ve farkları, çarpımları, bölümler (tanımlı olmak koşuluyla) ve bileşimleri sürekli fonksiyonlardır.

Örnek 3.2.

i. $y = a + bx^t$ fonksiyonu sürekli olduğuna göre $b = 0$ koyarsak $y = a$ sabit fonksiyonu da süreklidir demektir. $y = a$ fonksiyonunun sürekli olduğunu doğrudan ispat ediniz.

ii. $y = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 2$ fonksiyonu süreklidir. Çünkü, $2x^3$, $3x^2$, $5x$ ve $y = 2$ sabit fonksiyonları sürekli fonksiyonlardır ve y bu sürekli fonksiyonların toplam ve farklarından oluşur.

ii. $y = (x^2 - 1)(x^3 + x^2 + 1)$ fonksiyonu süreklidir. Çünkü, $f(x) = (x^2 - 1)$ ve $g(x) = (x^3 + x^2 + 1)$ fonksiyonları süreklidir ve $y = f(x)g(x)$ iki sürekli fonksiyonun çarpımından oluşmaktadır.

iii. $y = (x^3 + x^2 + 1)/(x^2 - 1)$ fonksiyonu $x_o = 1$ noktası dışında her noktada süreklidir. Çünkü, x_o dışındaki her noktada $g(x) = (x^2 - 1) \neq 0$ dır ve $y = f(x)/g(x)$ fonksiyonu sürekli fonksiyonların bölümü olduğu için süreklidir.

iv. $y = (x^3 + x^2 + 1)^2$ fonksiyonu süreklidir. $g(x) = (x^3 + x^2 + 1)$, $f(x) = x^2$ dersek, $y = (fog)(x) = ((g(x))^2$ bileşik fonksiyonudur ve süreklidir.

v. $y = \ln((x^3 - 2x^2 + 1))$ fonksiyonu sürekli fonksiyonların bileşiğidir ve süreklidir.

vi. $\tan x = \sin x/\cos x$ fonksiyonu, $\cos x$ fonksiyonunun sıfırdan farklı değerler aldığı her noktada tanımlı ve süreklidir.

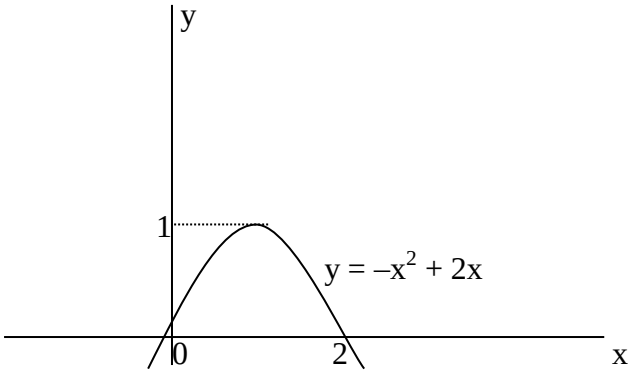
vii. $y = \ln(a^x)$ fonksiyonu sürekli fonksiyonların bileşiğidir ve süreklidir.

viii. $y = a^x$ ise $\ln y = x\ln a$ ve $x = e^{\ln(y/a)}$ olur. Bu ters fonksiyon da $x = e^u$, $u = \ln(y/a)$ olmak üzere sürekli fonksiyonların bileşiği olarak süreklidir.

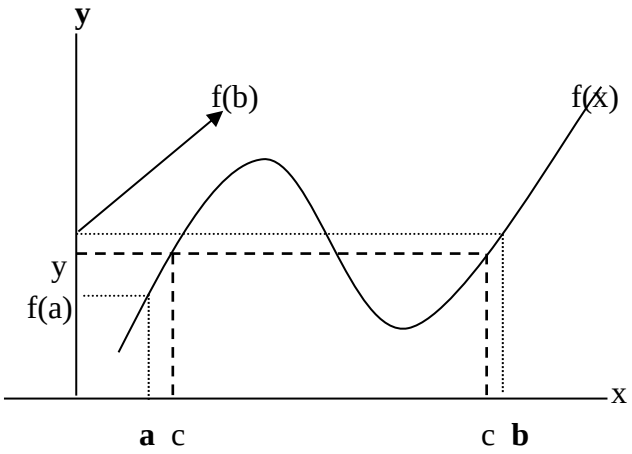
Sürekliliğin tam olarak ne anlama geldiğini sonraki iki teoremden görüyoruz:

Teorem 3.2. f: [a, b] → R fonksiyonu sürekli ise görüntü kümesi f([a, b]) de kapalı bir aralıktır.

Teorem şunu demektedir: a ve b sayılarını birleştiren doğrunun sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü (başka) iki sayıyı birleştiren bir doğrudur. Sürekli bir fonksiyon arada boşluk bırakmaz. Örneğin, $y = -x^2 + 2x$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon sürekli fonksiyonların toplamıdır ve süreklidir. Bu fonksiyon altında [0, 2] aralığının görüntüsü [0, 1] aralığıdır (aşağıdaki şekli inceleyiniz).



Dolayısı ile teorem [a, b] aralığının görüntüsü [f(a), f(b)] aralığıdır dememektedir. Bu örnekte f(a) = 0 = f(b) dir ama f([a, b]) = [0, 1] dir.



Teorem 3.3. (Ara değer teoremi) f: [a, b] → R fonksiyonu sürekli ve f(a) ≠ f(b) olsun. O halde, f(a) ile f(b) arasındaki her y için, f(c) = y olacak şekilde bir c ∈ [a, b] vardır (yani sürekli bir fonksiyon birbirinden farklı iki değer alıyorsa, bunların arasındaki her değeri alır).

Buna göre sürekli bir fonksiyon iki farklı değer alıyorsa bu değerler arasında kalan her değeri alır, arada boşluk bırakmaz. Yukarıdaki şekilden görüldüğü gibi bu değeri birden fazla x değeri için alabilir, ama mutlaka bir defa alır.

Ara değer teoreminin aşağıdaki özel hali iktisatta çok kullanılır:

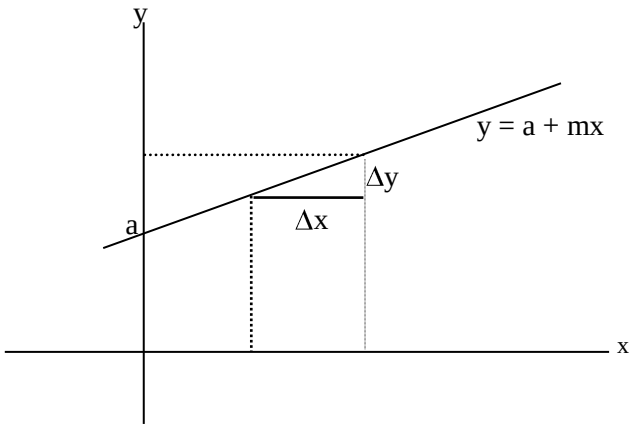
Teorem 3.4. f: [a, b] $\rightarrow$ R fonksiyonu sürekli ve f(a) < 0, f(b) > 0 olsun. O halde, f(c) = 0 olacak şekilde bir c $\in$ [a, b] vardır.

Buna göre, f(a) < 0, f(b) > 0 olduğunda sürekli bir fonksiyon arada sıfır değeri almadan işaret değiştiremez.

3.2 TÜREV

Bu bölümde tek değişkenli fonksiyonlarda türev konusunu ele alacağız. İktisatta en çok uygulama alanı bulan konu istisnasız türevdir. Türevlenebilir fonksiyonlar sürekli olmaya ek olarak "düzgün ya da pürüzsüz" fonksiyonlardır. Bir f(x) fonksiyonunun sürekli olduğu bir x_o noktasında "öngörülebilir" olduğunu biliyoruz: x x_o a yakın kalarak değiştiğinde f(x) de $f(x_o)$ a yakın kalır. Bir f(x) fonksiyonun x_o noktasında türevi varsa ve biz bunu biliyorsak, f(x) fonksiyonunun x_o noktasının yakınlarında nasıl değiştiğini de biliyoruz demektir.

3.2.1 BİR DOĞRUNUN EĞİMİ



Şekil 3.3 Bir doğrunun eğimi

$$f: R \rightarrow R,\ y = f(x) = a + mx$$

fonksiyonunun bir doğrunun denklemini tanımladığını ve sürekli olduğunu biliyoruz. Bilindiği gibi buradaki "m" sayısı doğrunun eğimidir. Bunun anlamını görmek için önce sıklıkla kullanacağımız fark operatörünü, Δ, tanımlayalım:

- herhangi bir z $\in$ R için Δz = z deki değişme olarak yorumlanır: Δz > 0 ise z değişkeni artmaktadır, Δz < 0 ise z değişkeni azalmaktadır.

Şimdi,

$y_1 = f(x_1) = a + mx_1$ ve

$y_o = f(x_1) = a + mx_o$ olduğuna göre:

$\Delta y = y_1 - y_o = [(a + mx_1) - (a + bx_o)] = m(x_1 - x_o) = m\Delta x$ ve

$$\Delta y/\Delta x = m$$

olur. O halde $m = \Delta y/\Delta x$ = (y deki değişme)/(x deki değişme) demektir ve bu anlamda $y = f(x) = a + mx$ fonksiyonunun eğimidir. Bize x değiştiğinde $y = f(x)$'in ne kadar değişeceğini gösteir. Buna göre $\Delta y = m\Delta x$ olur ve

$$m > 0 \text{ ise } \Delta x > 0 \text{ için } \Delta y > 0 \text{ (y artar);}$$

$$m < 0 \text{ ise } \Delta x > 0 \text{ için } \Delta y < 0 \text{ (y azalır).}$$

Burada dikkat edileceği gibi Δx in ne kadar büyük ya da küçük olduğu, ya da hesaplamanın hangi noktada yapıldığı, eğimin hesaplanmasını etkilemeyecektir. Başka bir anlatımla $y = a + mx$ fonksiyonu sabit eğimlidir. Bir doğrunun anlamı da zaten budur: doğrunun geçtiği bir (x, y) noktasını ve eğimini ya da doğrunun geçtiği iki noktayı biliyorsak, doğrunun denklemini bulabiliriz. Şöyle ki,

1. (x_o, y_o) noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemi:

$$y_o = a + mx_o \Rightarrow a = (y_o - mx_o) \text{ ve}$$

$$y = (y_o - mx_o) + mx \text{ olur.}$$

2. (x_o, y_o) ve (x_1, y_1) noktalarından geçen doğrunun denklemi:

$$m = \Delta y/\Delta x = (y_1 - y_o)/(x_1 - x_o),\ a = (y_o - mx_o) = (y_1 - mx_1) \text{ ve } y = a + mx \text{ olur.}$$

Örnek 3.2

i. (1, 3) noktasından geçen ve eğimi 2 olan doğrunun denklemini bulalım. $y = a + mx$ olacağına ve $f(1) = 3$ şartını sağlaması gerektiğine göre:

$$3 = a + 2(1) \Rightarrow a = 1 \text{ ve aradığımız doğrunun denklemi } y = 1 + 2x \text{ dir.}$$

ii. $(x_o, y_o) = (1, 3)$ ve $(x_1, y_1) = (2, 5)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulalım. Burada, $\Delta x = x_1 - x_o = 2 - 1 = 1$ ve $\Delta y = y_1 - y_o = 5 - 3 = 2$ olduğuna göre

$m = \Delta y/\Delta x = 2/1 = 2$ olur.

Öte yandan, $y = a + mx$ olacaksa $y_o = 3 = a + mx_o = a + m$ ve $y_1 = 5 = a + mx_1 = a + 2m$ ve

$a = 3 - mx_o = 3 - 2 = 5 - mx_1 = 5 - 2(2) = 1$ olur.

O halde aradığımız denklem $y = 1 + 2x$ dir. Dolayısı ile a sayısını hangi noktayı gözönüne alarak hesapladığımız fark etmeyecektir. Burada eğim pozitiftir. Buna göre $\Delta y = 2\Delta x$ dir ve $\Delta x > 0$ ise (x artarsa), y ($2\Delta x$ kadar) artar.

iii. $(x_o, y_o) = (1, 3)$ ve $(x_1, y_1) = (2, 1)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulalım. Burada, $\Delta x = x_1 - x_o = 2 - 1 = 1$ ve $\Delta y = y_1 - y_o = 1 - 3 = -2$ olduğuna göre

$m = \Delta y/\Delta x = -2/1 = -2$ olur.

Öte yandan, $y = a + mx$ olacaksa $y_o = 3 = a + mx_o = a + m \Rightarrow a = 3 - (-2) = 5$. O halde aradığımız denklem $y = 5 - 2x$ dir. Burada eğim negatiftir: $\Delta x > 0$ ise (x artarsa), y ($-2\Delta x$ kadar) azalır.

Aşağıdaki doğruların denklemlerini bulunuz, grafiklerini şekil üzerinde gösteriniz:

i. (1, –1) noktasından geçen ve eğimi m = 1 olan,

ii. (1, –1) noktasından geçen ve eğimi m = –1 olan,

iii. (2, 3) ve (3, 2) noktalarından geçen,

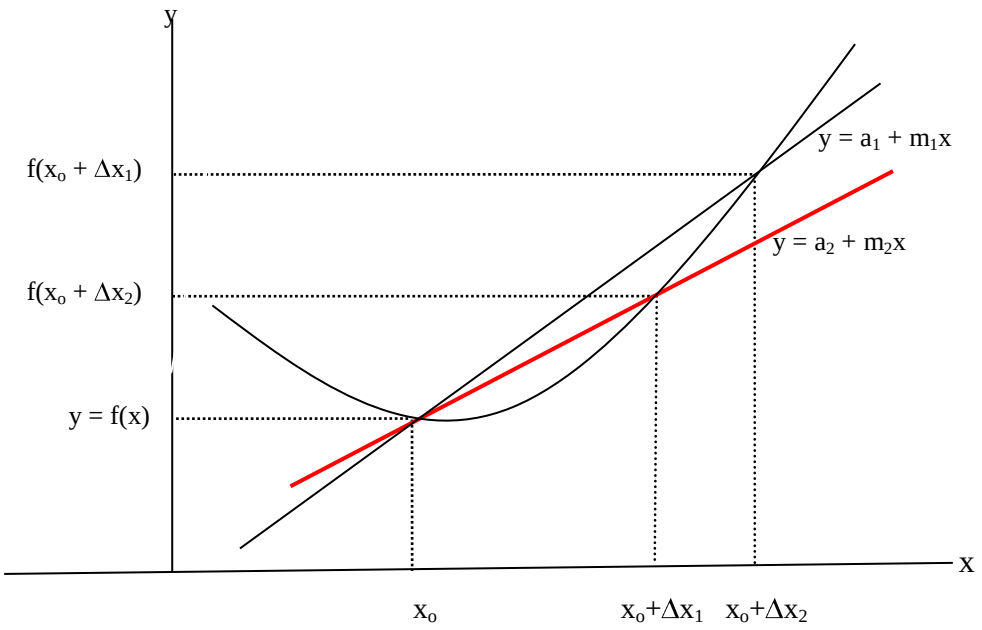
iv. (2, 3) ve (3, –2) noktalarından geçen,

v. (2, 3) ve (3, 4) noktalarından geçen.

3.2.2 BİR FONKSİYONUN EĞİMİ VE TÜREV

Şimdi türev konusunun problemini ortaya koyabiliriz:

- Bir doğruyu tanımlayan fonksiyonun eğimini bildiğimizde fonksiyonun nasıl değişeceğini bildiğimiz gibi, genel bir f(x) için de benzer şekilde yorumlayabileceğimiz bir eğim tanımlayıp bunu hesaplayabilir miyiz?



Şekil 3.4 Bir Fonksiyonun "Eğimi"

Şekil 3.4'de genel bir $y = f(x)$ fonksiyonu üzerinde (x_o, y_o) noktasında 'eğim' hesaplamaya çalışalım. Bu noktadan başlayarak x'in değerini Δx_1 kadar arttırırsak, $x_1 = x + \Delta x$ olmak üzere $y_1 = f(x_1) = f(x_o + \Delta x)$ olur. Burada $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$ olmak üzere, eğimi

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

olarak hesaplarsak aslında fonksiyon üzerinde belirtilen iki noktadan geçen doğrunun eğimini bulmuş oluruz (Şekil 3.4'de $y = a_1 + m_1$ doğrusu).

Öte yandan $\Delta x = \Delta x_2$ koyarsak,

$$m_2 = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} = \frac{f(x_o + \Delta x_2) - f(x_o)}{\Delta x_2}$$

olmak üzere Şekil 3.4'de $y = a_2 + m_2x$ doğrunun eğimini hesaplamış oluruz. O halde, Δx'i nasıl seçtiğimize bağlı olarak $(x_o, f(x_o))$ noktasından geçen farklı doğruların eğimlerini bulmuş olacağız. Şöyle düşünelim:

> $(x_o, f(x_o))$ den geçen hangi doğruyu seçersem, $f(x)$ değerlerini x_o noktasının yakınlarında o doğru üzerinde daha az hatayla hesaplamak mümkün olur?

Örneğin, $y = f(x) = x^2$ fonksiyonunu ele alalım ve $x_o = 1$ noktasında eğimini yukarıdaki yöntemle farklı Δx değerleri için hesaplayalım. $f(x_o) = 1$ olduğuna ve her durumda doğru (1, 1) noktasından geçeceğine göre:

Δx	$\Delta y = (x_o + \Delta x)^2 - 1$	$m = \Delta y/\Delta x$	$y = a + mx$
1	3	3	–2 + 3x
0.5	1.25	2.5	–1.5 + 2.5x
0.1	0.21	2.1	–1.1 + 2.1x
0.01	0.0201	2.01	–1.01 + 2.01x
0.001	0.002001	2,001	–1.001 + 2.001x
0	0	2	–1 + 2x

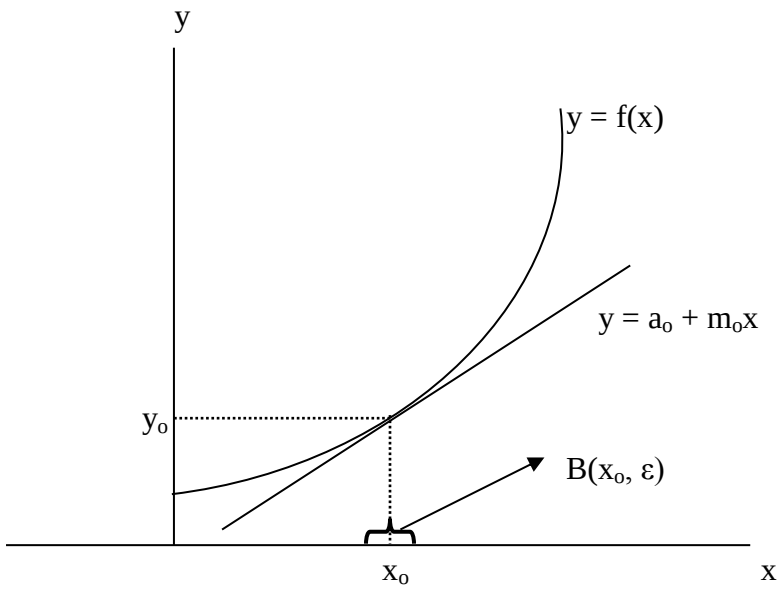
olacaktır. Burada $\Delta x = 0$ koyulduğunda $\Delta y/\Delta x = 0/0$ olmaktadır ama biz $m = \Delta y/\Delta x = 2$ aldık. Şu nedenle ki, $\Delta y/\Delta x$ değerlerine bakıldığında Δx küçüldükçe $\Delta y/\Delta x = 2$ değerine limit olarak yaklaşmaktadır. Yani Δx küçüldükçe kiriş doğru $y = -1 + 2x$ teğet doğrusuna limit olarak yaklaşır. Şimdi, $x = 1.015$ in için $y = x^2$—ki bunun 1.030225 olduğunu biliyoruz—değerini tablodaki doğrular üzerinde hesaplayalım:

$y = a + mx$	$f(1.015) \approx a + m(1.015)$
–2 + 3x	1.045
–1.5 + 2.5x	1.0375
–1.1 + 2.1x	1.0315
–1.01 + 2.01x	1.03015
–1.001 + 2.001x	1.030015
–1 + 2x	1.03

Tahminlerin $m = 2$ değerine yaklaştıkça iyileştiğine dikkat ediniz. Öte yandan $x = 1$ noktasına daha yakın olan $x = 1.0015$ değeri için $x^2 = 1.00300225$ değerini aynı doğrular üzerinde tahmin etseydik:

$y = a + mx$	$f(1.015) \approx a + m(1.0015)$
$-2 + 3x$	1.0045
$-1.5 + 2.5x$	1.00375
$-1.1 + 2.1x$	1.00315
$-1.01 + 2.01x$	1.003015
$-1.001 + 2.001x$	1.0030015
$-1 + 2x$	1.003

olurdu, ve m = 2 değerine yaklaştıkça tahminler daha iyi olmaktadır. Buradan çıkan sonuç $x_o = 1$ noktasının "yakın civarında," yani yeterince küçük $\varepsilon > 0$ve $x \in B(x_o, \varepsilon)$ için, $y = x^2$ nin değerini $y = -1 + 2x$ teğet oğrusu üzerinde "en iyi" şekilde tahmin edebiliyoruz.



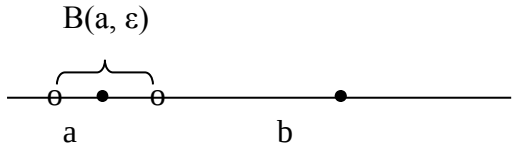
Şekil 3.5 Bir Fonksiyonun Eğimi

İşte bir f(x) fonksiyonunun eğiminin anlamı budur: bir fonksiyonun bir x_o noktasındaki eğimi, fonksiyona o noktada teğet olan doğrunun eğimidir. x_o noktasının bir (yeterince küçük) ε–komşuluğunda (Şekil 3.5'de $B(x_o, \varepsilon)$), $x \in B(x_o, \varepsilon)$ için $f(x) \approx a_o + m_o x$ değeri fonksiyonun "en iyi doğrusal yaklaşık değerini" verir. Ve biz f(x)'in x_o noktasındaki eğimine fonksiyonun o noktadaki türevi diyoruz. Bu tanımı formel olarak vermeden önce iç nokta kavramını vermemiz gerekir.

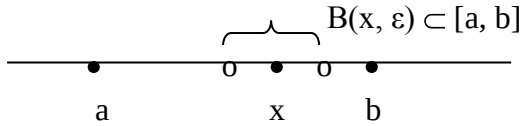
Tanım 3.3 İç nokta

$A \subseteq R$ ve $x_o \in A$ olsun. Eğer, $B(x_o, \varepsilon) \subset A$ olacak şekilde en az bir $\varepsilon > 0$ varsa x_o A'nın iç noktasıdır denir. A'nın bütün iç noktalarının kümesine içA = {x ∈ A| x A'nın iç noktasıdır} diyeceğiz.

Örneğin, A = {1, 2, 3} kümesinin iç noktası yoktur: içA = $\varnothing$ dır. Çünkü her $x \in A$ ve her $\varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ aralığı A da olmayan reel sayılar içerecektir. A = [a, b] kümesini alırsak, $a \in A$ bir iç nokta değildir:



Burada $B(a, \varepsilon)$ aralığı her $\varepsilon > 0$ için $x < a$, yani $x \notin A$, noktalar içerir. Yani, $B(a, \varepsilon) \subset [a, b]$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ yoktur. Benzer şekilde $b \in A$ noktası da A'nın iç noktası değildir (şekil üzerinde gösteriniz). Ama, her $a < x < b$, $x \in A$, A'nın bir iç noktasıdır. $\varepsilon < \min(d(x, a), d(x, b))$ olan her $\varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon) \subset [a, b]$ dir:



O halde iç[a, b] = (a, b) olur: her $x \in (a, b)$ için $B(x, \varepsilon) \subset [a, b]$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Buradan hareketle A = (a, b) için içA = A olduğunu görüyoruz: (a, b) aralığındaki her x için (a, b) aralığında kalacak şekilde x merkezli bir açık aralık bulabiliriz (şekil üzerinde gösteriniz). Zaten (a, b) aralığına "açık" aralık denmesinin nedeni de budur: A = içA olan kümeler **"açık" kümelerdir**. Buna göre [a, b] açık küme değildir, çünkü [a, b] $\neq$ iç[a, b] = (a, b) dir. Doğal olarak her $x \in R$, R nin bir iç noktasıdır.

Tanım 3.4 Türev

$f: D \subseteq R \to R$, $x_o \in$ içD, ve f(x) x_o noktasında sürekli olsun. Fonksiyonun x_o noktasındaki türevi fonksiyona x_o noktasında teğet olan doğrunun eğimidir ve $\Delta x \neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

(eğer bu limit varsa) olarak hesaplanır. Buna göre fonksiyonun x_o noktasındaki türevi x_o noktasına tekabül ettirilen bir reel sayıdır ve bu sayı

$$f'(x_o) \text{ veya } Df(x_o) \text{ veya } \frac{df}{dx}(x_o)$$

şeklinde gösterilir. Eğer fonksiyonun içD üzerinde her noktada türevi varsa f(x) içD üzerinde her noktada türevlenebilir denir. Bu durumda her $x \in$ içD için bir sayı elde edecek şekilde bir türev fonksiyonu vardır ve bu fonksiyon f'(x) veya Df veya $\frac{df}{dx}$ şeklinde gösterilir.

Uyarı:

1. Dolayısı ile türev fonksiyonun sürekli olduğu noktalarda tanımlıdır. Çoğunlukla türev süreklilik koşulu koymadan tanımlanır ve daha sonra fonksiyonun türevi olan noktalarda sürekli

olduğu bir teorem olarak ispatlanır: süreklilik türev için gereklidir. Burada bu gereklilik tanıma dahil edilmiştir. Ama her sürekli fonksiyonun türevi olması gerekmez.

2. Türevin x $\in$ içD olan noktalarda tanımlanmasının nedeni limit alma işlemi için x noktasına hem sağdan hem soldan "yaklaşabilme" gerekliliğidir.

Örnek 3.3

i. $f(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1 - x,\ x < 1 \text{ ise} \\ x + 1,\ x \geq 1 \text{ ise} \end{array} \right\}$ fonksiyonu x = 1 noktasında sürekli değildir ve bu noktada türevi yoktur: bu fonksiyona x = 1 noktasında teğet olan doğru yoktur. Fonksiyonun grafiğini çizerek inceleyiniz.

ii. f(x) = a sabit fonksiyonu olsun. Bu fonksiyonun türevi her noktada sıfır, yani Df(x) = 0 sabit fonksiyon, olur. Çünkü türev eğimi, dolayısı ile değişimi ölçer ve bu fonksiyon değişmediğine göre türevi sıfır olmalıdır. Gerçekten de türevin tanımından:

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = a - a = 0$ ve $\Delta x \neq 0$ için

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

olur.

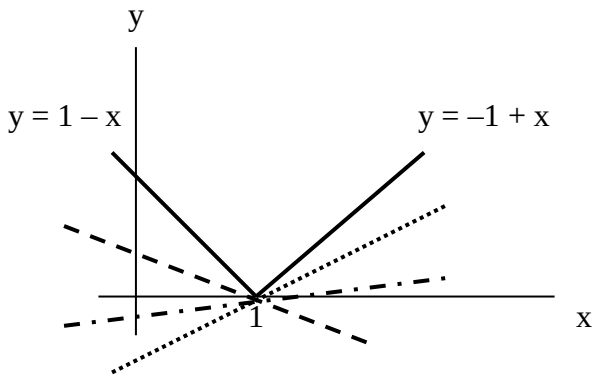
iii. y = f(x) = a + bx fonksiyonunun türevi b olmalıdır: bu doğruya teğet olan doğru kendisidir ve eğimi de b'dir. Türevin tanımından hesaplama yaparsak:

$\Delta y = a + b(x + \Delta x) - (a + bx) = b\Delta x$, ve $\Delta x \neq 0$ için

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{b\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} b = b$$

olur.

iv. $f(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1 - x,\ x < 1 \text{ ise} \\ -1 + x,\ x \geq 1 \text{ ise} \end{array} \right\}$ fonksiyonu her noktada süreklidir ama x = 1 noktasında türevi yoktur.



Fonksiyonun grafiği incelendiğinde görüleceği gibi x = 1 noktasında fonksiyona teğettir diyebileceğimiz tek bir doğru yoktur: şekilde kırık çizgiyle gösterilen bütün doğrular fonksiyona x = 1 noktasında teğettir. Dolayısı ile fonksiyonun x = 1 noktasında eğimi tanımlı değildir ve türevi yoktur. Bu örnek bize türevlenebilir fonksiyonların ne anlamda "düzgün" olduğunu göstermektedir. Bu fonksiyon $x_o = 1$ noktasında süreklidir: fonksiyon x = 1 noktasında davranış değiştirmekte (y = 1 – x doğrusundan y = 1 + x doğrusuna geçmekte) ve bunu kopma yaratmadan yapmaktadır. Ama biz x = 1 noktası civarında fonksiyonun değerlerini bir teğet y = a + mx doğrusu üzerinde tahmin edemeyiz. Türevi olan bir fonksiyon x_o noktasında kopma yaratmadığı gibi, birdenbire davranış da değiştirmez. Bu da tam olarak x_o noktasında üzerinde x_o a yakın x için f(x) değerlerini hesaplayabileceğimiz tek bir teğet doğru olduğu anlamına gelir.

Türevin hesabı limit hesabına dayanmaktadır ve bu da her zaman kolay bir iş değildir. Örneğin, y = sinx fonksiyonunun türevi $\lim_{\Delta x \to 0}[\sin(x + \Delta x) - \sin x]/\Delta x$ olarak hesaplanmalıdır ve bu limitin var olduğunu gösterip bulmak epeyi çaba gerektirir. Ama türev kavramının en büyük meziyeti belirli temel fonksiyonların türevleri bilinince, aşağıdaki teoremle birlikte, bizim karşılaşacağımız (türevi olan) her fonksiyonun türevini bulmanın, her seferinde limit hesaplamadan, mümkün olmasıdır.

Teorem 4.1. $X \subseteq R$, f ve g X üzerinde türevlenebilir fonksiyonlar; $\alpha, \beta \in R$ olmak üzere

i. Türev fonksiyonu doğrusaldır:

$$D(\alpha f + \beta g) = \alpha Df + \beta Dg \text{ dir.}$$

(***toplam–fark kuralı:*** türevlenebilir fonksiyonların toplam ve farklarının ($\beta = -1$) türevi, türevlerin toplam ve farkına eşittir).

ii. D(fg) = (Df)g + f(Dg) dir.

(***çarpım kuralı:*** türevlenebilir fonksiyonların çarpımının türevi, birincinin türevi çarpı ikinci + ikincinin türevi çarpı birinci olarak hesaplanır).

iii. $g(x) \neq 0$ olmak üzere $D(f/g) = \dfrac{(Df)g - f(Dg)}{(g)^2}$ dir.

(***bölüm kuralı:*** türevlenebilir fonksiyonların bölümünün türevi, (payın türevi çarpı payda – paydanın türevi çarpı pay) bölü paydanın karesi olarak hesaplanır).

iv. D(fog) = (Df)(Dg) ya da y = f(z), z = g(x) olmak üzere $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dx} = (f')(g')$ dür.

(***zincir kuralı:*** türevlenebilir fonksiyonların bileşiğinin (fog) türevi, (f nin g ye göre türevi çarpı g nin x e göre türevi olarak hesaplanır).

v. f^{-1} (ters) fonksiyonu varsa $Df^{-1} = \dfrac{1}{Df}$ ya da $y = f(x), x = f^{-1}(y)$ olmak üzere $\dfrac{df^{-1}}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{df}{dx}}$ olur.

(***ters fonksiyon kuralı:*** türevlenebilir bir fonksiyonun tersinin türevi, fonksiyonun türevinin tersidir).

Uyarı: Bu kurallar ikiden fazla fonksiyona da uyarlanabilir. f, g, h aynı küme üzerinde türevlenebilir fonksiyonlar; a, b, c $\in$ R olmak üzere:

D(af + bg + ch) = aDf + bDg + cDh,

D(fgh) = (Df)gh + f(Dgh) = (Df)gh + f(hDg + gDh) = (Df)gh + (Dg)fh + (Dh)fg,

D(fo(goh)) = DfDgDh, yani y = f(z), z = g(u), u = h(x) ise $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{du}\dfrac{du}{dx} = (f')(g')(u')$ olur.

Teorem 3.5 (Bazı temel fonksiyonların türevleri)

y = f(x)	Df
$q \in Q$, $y = ax^q$	$Df = aqx^{q-1}$
$\alpha \in R$, $y = ax^\alpha$	$Df = a\alpha x^{\alpha-1}$
y = lnx	Df = 1/x
$y = ae^x$	$Df = ae^x$
$y = ca^x$	$Df = (\ln a)a^x$
y = sinx	Df = cosx
y = cosx	Df = –sinx.

Bu iki teorem birlikte bizim karşılaşabileceğimiz bütün fonksiyonların türevini almamızı sağlar. Aşağıdaki örnekleri dikkatle inceleyiniz.

Örnek 3.4

i. $y = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 5$ türevini hesaplayalım. Burada,

$$g(x) = 2x^4,\ h(x) = x^3,\ u(x) = -3x^2,\ z(x) = -2x,\ v(x) = 5$$

koyarsak

$$y = g(x) + h(x) + u(x) + z(x) + v(x)$$

olur. O halde, Teorem 4.1. uyarınca $Dy = Dg + Dh + Du + Dz + Dv$ olur. Teorem 4.2. ye göre de $f(x) = ax^q$ olduğunda $Df(x) = aqx^{q-1}$ olduğuna göre:

$Dg = 2.4.x^{4-1} = 8x^3$,

$Dh = 3x^{3-1} = 3x^2$,

$Du = -3.2.x^{2-1} = -6x$,

$Dz = -2x^{1-1} = -2$,

$Dv = 0$.

O halde,

$$y = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 5 \text{ için } Dy = 8x^3 + 3x^2 - 6x - 2 \text{ olur.}$$

Doğal olarak bu tür fonksiyonların türevini bulurken her seferinde g(x) vb. fonksiyonlar yazıp uzun yoldan gitmeye gerek yoktur. $y = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 5$ verilince her bir ifadenin türevini alıp (işaretlere dikkat ederek) toplamını yazarız. Örneğin,

$y = 3x^5 - 4x^3 + 5x^2 - 5x + 7$ ise $Dy = 15x^4 - 12x^2 + 10x - 5$,

$y = 3x^2 + x^{0.5} - 2x^{0.3}$ ise $Dy = 6x + 0.5x^{-0.5} - 0.6x^{-0.7}$ olur.

ii. $y = 1/x$ olsun. Bunun türevini iki yoldan bulabiliriz:

1. yol: $y = 1/x = x^{-1}$ olduğuna göre $Dy = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -1/x^2$,

2. yol: bölüm kuralından $y = 1/x$ ise

$Dy = [(D1)x - 1Dx]/(x)^2 = [0.x - 1.1]/ x^2 = -1/x^2$.

Burada birinci yolu daha verimli olduğu açıktır. Örneğin,

$y = 1/x^2$ ise $y = x^{-2}$ ve $Dy = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$,

$y = 1/x^{2/3}$ ise $y = x^{-2/3}$ ve $Dy = (-2/3)x^{-2/3-1} = -(2/3)x^{-5/3}$ olur.

iii. $y = 1/(1 - x)$ ise Dy yi iki yoldan bulabiliriz:

1. yol: $y = (1 - x)^{-1} = u^{-1}$, $u = 1 - x$ dersek, zincir kuralından

$Dy = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (-1u^{-2})(-1) = u^{-2} = 1/(1 - x)^2$ olur.

2. yol: $y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{1 - x}$ olduğundan, bölüm kuralını uygulayarak

$Dy = \frac{gDf - fDg}{g^2} = \frac{1}{(1 - x)^2}$ elde ederiz.

Çünkü, f = 1 sabit fonksiyonu olduğundan Df = 0, g = 1 – x olduğundan Dg = –1 olmaktadır.

iv. $y = \dfrac{x^2 - 5x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x + 3}$ fonksiyonunun türevi en kolay bölüm kuralından hesaplanır.

$f(x) = x^2 - 5x + 2$ ve $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 3$ olmak üzere $y = f(x)/g(x)$ dir. Burada,

$Df = 2x - 5$ ve $Dg = 3x^2 - 6x + 2$ olduğuna göre ($g(x) \neq 0$ olduğu noktalarda):

$$Dy = \frac{gDf - fDg}{g^2} = \frac{(x^3 - 3x^2 + 2x + 3)(2x - 5) - (x^2 - 5x + 2)(3x^2 - 6x + 2)}{(x^3 - 3x^2 + 2x + 3)^2}$$

$$Dy = \frac{-x^4 + 10x^3 - 19x^2 + 38x - 19}{(x^3 - 3x^2 + 2x + 3)^2}$$

olur.

v. $y = (x^2 + 2x - 1)^2$ olsun. Bu fonksiyonun türevi zincir kuralından kolaylıkla hesaplanır.

$u(x) = x^2 + 2x - 1$ dersek $Du = 2x + 2$ olur.

O halde $y = u^2$ ve $Dy = (2u)Du = 2(x^2 + 2x - 1)(2x + 2)$ olur.

Bu tür ifadelerin türevleri hesaplanırken parantez içindeki ifadeyi bir değişken gibi düşünüp "y nin paranteze göre türevi = $2(x^2 + 2x - 1)$ çarpı içinin türevi = $2x + 2$" biçiminde daha hızlı hesaplama yapılır. Örneğin,

$y = (x^3 - 5x^2 + 2x)^{2/3}$ ise $Dy = \underbrace{[2/3(x^3 - 5x^2 + 2x)^{2/3-1}]}_{\text{"paranteze göre türev"}}\underbrace{(3x^2 - 10x + 2)}_{\text{"içininin türevi"}}$ yani

Dolayısı ile,

$Dy = 2/3(x^3 - 5x^2 + 2x)^{-1/3}(3x^2 - 10x + 2)$ olur.

vi. $y = \ln(1 + x^2)$ olsun. Burada $u(x) = 1 + x^2$ koyarsak $Du = 2x$, $y = \ln u$ ve zincir kuralından $Dy = (1/u)Du = (2x)/(1 + x^2)$ olur.

vii. $\tan x = \sin x/\cos x$ olduğuna göre bölüm kuralından

$D(\tan x) = D(f/g) = [gDf - fDg]/g^2 = [\cos x(\cos x) - \sin x(-\sin x)]/(\cos x)^2$

$= [(\cos x)^2 + (\sin x)^2]/(\cos x)^2 = 1/(\cos x)^2$

olur ($(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ olduğunu hatırlayınız).

viii. $z = \ln y$ ise $z' = \dfrac{dz}{dy} = 1/y$ dir. Ama $z = \ln y$ ise $y = e^z$ dir ve $y' = \dfrac{dy}{dz} = e^z = y$ olmaktadır.

Buradan sık kullanılan faydalı bir sonuç çıkar:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{d\ln y} = y.$$

Bu aslında ters fonksiyon kuralının sonucudur. z = f(y) ve y = $f^{-1}(z)$ olduğundan $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{dz/dy} = \frac{1}{1/y} = y$ olmaktadır.

ix. y = ca^x fonksiyonunun türevi Teorem 4.2. de Dy = (clna)a^x olarak verilmektedir. D(lnx) = 1/x olduğunu kabul edersek bunu ispatlayabiliriz. y = ca^x olduğuna göre lny = lnc + xlna dır. O halde, $\frac{d(\ln y)}{dx} = \ln a$ olur (c sabit olduğundan Dlnc = 0 dir) ve zincir kuralından, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d(\ln y)}\frac{d(\ln y)}{dx} = y\ln a = ca^x \ln a = (c\ln a)a^x$ olur (Örnek (viii) deki sonucun kullanıldığına dikkat ediniz

x. y = $a^{u(x)}$, u(x) = x^2 + x verildiğinde zincir kuralı ile y′ = (lna)a^uu′ = (lna)a^u(2x + 1) olarak bulunur. Burada da logaritmik türev yoluna gidebilirdik: lny = ulna olduğuna göre $\frac{d\ln y}{dx}$ = (lna)u′ = (lna)(2x + 1) ve Örnek (viii) deki sonucu kullanarak:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\ln y}\frac{d\ln y}{dx} = y(\ln a)(2x+1) \text{ bulunur.}$$

xi. $y = (x^2 + x)^{(x+1)}$ ise y′ bulmanın en kolay yolu logaritmik türev yoluna gitmektir. Burada, lny = (x + 1)ln(x^2 + x) ve $\frac{d\ln y}{dx} = \ln(x^2+x) + (x+1)\frac{2x+1}{x^2+x}$ olur. Bir önceki örnekte olduğu gibi, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\ln y}\frac{d\ln y}{dx} = y\frac{d\ln y}{dx} = y\ln(x^2+x) + y(x+1)\frac{2x+1}{x^2+x}$ olarak bulunur.

xii. $y = e^{(x^2+1)}$ fonksiyonu verildiğinde u = x^2 + 1 koyarsak y = e^u, ve zincir kuralından Dy = D(e^u)Du = e^u(2x) = 2xe^u olur. Başka bir yol logaritmik türev yoludur. Burada, lny = x^2 + 1 olduğuna göre $\frac{d\ln y}{dx}$ = 2x olmaktadır. Örnek (viii) deki sonucu kullanarak:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\ln y}\frac{d\ln y}{dx}$ = y2x = 2xy bulunur.

xiii. $y = \ln\frac{x^2+2x}{x^3 - 2x^2 + 2x}$ fonksiyonu verildiğinde y = ln(x^2 + 2x) – ln(x^3 – $2x^2$ + 2x) yazarsak,

Dy = Dln(x^2 + 2x) – Dln(x^3 – $2x^2$ + 2x) = $\frac{2x+2}{x^2+2x} - \frac{3x^2-4x+2}{x^3 - 2x^2 + 2x}$ elde edilir. Burada her terim için yukarıdaki (vi) örneğindeki yol izlenmiştir.

xiv. $q = 10/p$ olmak üzere bir talep fonksiyonu ise $Dq = -10/p^2$ olur. Çünkü, $q = 10p^{-1}$ olduğundan $Dq = -1(10p^{-1-1}) = -10p^{-2} = -10/p^2$ dir.

xv. $y = (x + 1)(x^2 - 2)(x^3 + 3x^2)$ ise

$Dy = (x^2 - 2)(x^3 + 3x^2)D(x + 1) + (x + 1)(x^3 + 3x^2)D(x^2 - 2) + (x + 1)(x^2 - 2)D(x^3 + 3x^2)$

$= (x^2 - 2)(x^3 + 3x^2) + (x + 1)(x^3 + 3x^2)[2x] + (x + 1)(x^2 - 2)[3x^2 + 6x]$ olur.

xvi. $y = [(x^2 - 2)(x^3 + 3x^2)]^{0.5}$ ise

$Dy = 0.5[(x^2 - 2)(x^3 + 3x^2)]^{-0.5}\{(x^3 + 3x^2)D(x^2 - 2) + (x^2 - 2)D(x^3 + 3x^2)\}$

$= 0.5[(x^2 - 2)(x^3 + 3x^2)]^{-0.5}\{(x^3 + 3x^2)2x + (x^2 - 2)(3x^2 + 6x)\}$ olur.

xvii. $c = c(y^d)$: tüketim harcanabilir gelirin fonksiyonudur,

$y^d = y - t$: harcanabilir gelir = gelir – vergilerdir,

$t = t(y)$: vergiler gelirin fonksiyonudur,

ilişkileri verilsin ve bu fonksiyonların türevlenebilir olduğunu varsayalım. Buna göre $c' = \frac{dc}{dy^d}$ tüketim fonksiyonunun y^d değişkenine göre türevidir. Buradan $\frac{dc}{dy}$ yi, yani tüketimin gelire göre türevini hesaplayalım. Burada iki yol izleyebiliriz:

a. Önce $y^d = y - t(y)$ koyarsak $\frac{dy^d}{dy} = 1 - \frac{dt}{dy} = 1 - t'$ elde ederiz. Öyleyse, zincir kuralından

$$\frac{dc}{dy} = \frac{dc}{dy^d}\frac{dy^d}{dy} = c'(1 - t') \text{ olur.}$$

b. $c = c(y^d) = c(y - t(y))$ yazarsak "c nin paranteze göre türevi çarpı parantezin y ye göre türevi" kuralıyla (ki bu aslında zincir kuralının ifadesidir) doğrudan $c'(1 - t')$ elde edilir.

Her iki yolla da elde edilen türev şunu ifade eder: gelir değiştiğinde vergiler t' kadar, harcanabilir gelir $(1 - t')$ kadar ve tüketim c' (çarpı) harcanabilirdeki değişme kadar değişir, çünkü harcanabilir gelirdeki değişmeler tüketimde c' kadar değişim yaratmaktadır.

xviii. $T = X(q) - qM(q)$ olsun. Burada

$$\frac{dT}{dq} = \frac{dX}{dq} - D(qM(q)) = \frac{dX}{dq} - M - q\frac{dM}{dq} = X' - M - qM'$$

olacaktır. $qM(q)$ ifadesine çarpım kuralının uygulandığına dikkat ediniz.

3.3 DİFERANSİYEL

Türevin tanımına giden açıklamalarda "bir doğru tanımlayan fonksiyonun eğimini bildiğimizde fonksiyonun nasıl değişeceğini bildiğimiz gibi, genel bir f(x) içinde benzer şekilde yorumlayabileceğimiz bir eğim tanımlayıp bunu hesaplayabilir miyiz?" demiştik. Diferansiyel kavramını kullanarak burada "benzer şekilde" ifadesine anlam vereceğiz.

Tanım 3.5 Diferansiyel

f: $D \subseteq R \to R$ içD üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $dx \in R$ için

$$dy = df = D(x)dx = f'(x)dx$$

ifadesine f 'nin diferansiyeli denir.

Uyarı: Burada dx herhangi bir sayıdır ama x'in diferansiyeli olarak adlandırılır.

Buna göre bir fonksiyonun türevini biliyorsak diferansiyelini de hemen yazabiliriz. Diferansiyel türevle aynı kurallara uyar. Buna göre, f(x), g(x) ve u(x) diferansiyeli olan fonksiyonlar olmak üzere:

$$d(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha df(x) + \beta dg(x) = \alpha f'dx + \beta g'dx \ (\alpha, \beta \in R)$$
$$d(f(x)g(x)) = d(f)g + f(dg) = f'gdx + fg'dx \ \text{(çarpım kuralı)}$$
$$d(f(x)/g(x)) = [(df)g - f(dg)]/g^2 \ (g(x) \neq 0) \ \text{(bölüm kuralı)}$$
$$df(u(x)) = (df)(du) = f'du = f'u'dx \ \text{(zincir kuralı)}$$

Örnek 3.5

i. $y = x^2$ fonksiyonunun türevi $y' = 2x$ olduğuna göre $dy = y'dx = 2xdx$ olur.

ii. $y = (x^2 - 2x)^3$ ise $y' = 3(x^2 - 2x)^2(2x - 2)$ olduğuna göre $dy = 3(x^2 - 2x)^2(2x - 2)dx$ olur.

iii. $y = \ln x$ ise $y' = 1/x \Rightarrow dy = dx/x$ dir.

iv. $y = \dfrac{x-1}{x^3+x}$ ise $Dy = \dfrac{(x^3+x)-(x-1)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2} = \dfrac{-2x^3+3x^2+1}{(x^3+x)^2}$ ve

$dy = \dfrac{-2x^3+3x^2+1}{(x^3+x)^2}dx$ olur.

v. $y = (x^2 - 2x)^{1/3}$ ise $u = (x^2 - 2x)$ için $du = 2(x - 1)dx$ olur. Öte yandan, $dy = (1/3)u^{-2/3}du$ olduğuna göre, $dy = (2/3)u^{-2/3}(x - 1)dx$ dir.

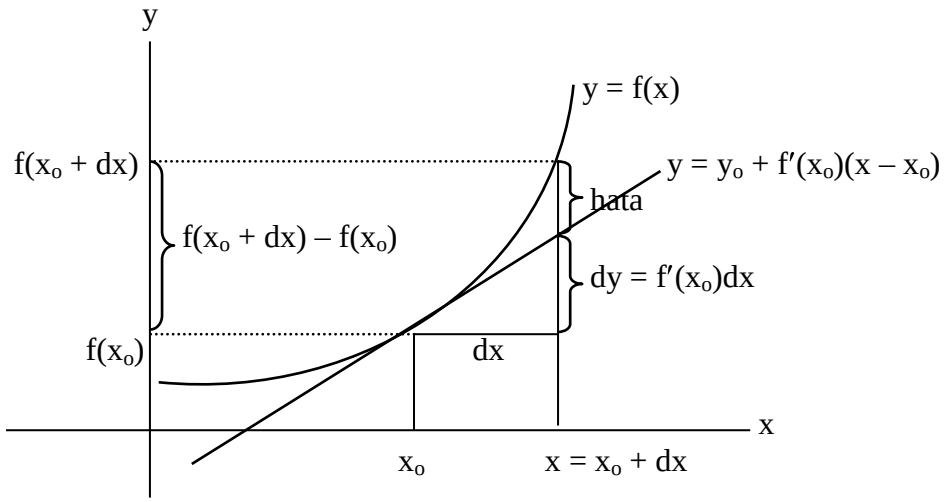
Şimdi, f: $D \subseteq R \to R$ türevlenebilir bir fonksiyon ve $x_o \in$ içD ise, fonksiyona x_o noktasındaki teğetin denklemi, $(x_o, y_o = f(x_o))$ noktasından geçen ve eğimi $f'(x_o)$ olan doğrunun denklemidir ve

$$y = (y_o - f'(x_o)x_o) + f'(x_o)x$$

olarak bulunur. Bunu düzenlersek:

$$y - y_o = f'(x_o)(x - x_o) \qquad (3.1)$$

elde ederiz. Dolayısı ile, $dx = (x - x_o)$ koyarsak $dy = f'(x_o)dx = y - y_o$ olur. Başka bir ifade ile bir fonksiyonun diferansiyeli, fonksiyonun "en iyi doğrusal yaklaşık değerini", yani teğet doğru üzerinde tahmininin, ifadesidir. Öyleyse, diferansiyeli (dy) fonksiyonun değerinde teğet doğru üzerindeki değişme olarak yorumlayabiliriz. Keyfi olarak konulan bir dx değeri için fonksiyonun değerindeki gerçek değişmeye nispetle yapılan hata büyük olur.



Şekil 3.6 Diferansiyel

Şekil 3.6'da görüldüğü gibi x_o noktasından dx kadar bir artışla $x = x_o + dx$ noktasına geldiğimizde fonksiyonun değeri gerçekte $f(x_o + dx) - f(x_o)$ kadar artarken, teğet doğru üzerinde hesaplanan diferansiyel (bu durumda) daha düşük bir değer tahmin etmektedir. Açık olduğu üzere dx değerleri azaldıkça (x_o noktasına yaklaştıkça) hata miktarları da azalacaktır ve $f(x_o + dx) - f(x_o)$ değeri dy değerine yaklaşacaktır. Bu önemli tespiti aşağıdaki teoremle ifade edilir.

Teorem 3.6 $f: D \subseteq R \to R$ bir $x_o \in$ içD noktasında türevlenebilir bir fonksiyon olsun. O halde, her $\varepsilon > 0$ ve $x_o \neq x \in B(x_o, \delta)$ için $dx = d(x, x_o)$ ve $\Delta y = f(x_o + dx) - f(x_o)$ olmak üzere

$$d(\Delta y, dy) < \varepsilon d(x, x_o)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

Bu teorem şunu demektedir: herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde x_o noktasına ε'na bağlı bir δ'dan daha yakın x değerleri için $\Delta y = f(x_o + dx) - f(x_o)$ ile dy arasındaki fark, yani $d(\Delta y, dy)$ olarak ölçülen hata, $\varepsilon d(x, x_o)$ değerinden daha küçük olur. Dolayısı ile en fazla $\varepsilon d(x, x_o)$ kadar hata yapmış oluruz ve çok küçük $d(x_o, x)$ değerleri seçerek (yani x_o noktasına çok yakın kalarak) hatayı istediğimiz kadar küçültebiliriz. Bu da bize, dx diferansiyelini "çok küçük" bir sayı olarak düşünmek üzere,

$$f(x_o + dx) \approx f(x_o) + dy = f(x_o) + f'(x_o)dx \qquad (3.2)$$

ifadesini verir. Buna göre, türeve eğim ve değişme kavramlarını atfedebiliriz: "x değişkeni dx kadar arttığında y değişkeni $dy = f'(x)dx$ kadar artar." İşte bu yorumla türevin bir fonksiyonun eğimi olduğu fikri daha kesinlik kazanır ve diferansiyel iktisatta çok kullanılır.

Örnek 3.6

i. 4.0001 sayısının karekökünü diferansiyel yardımıyla hesaplayalım. $y = f(x) = x^{0.5}$ fonksiyonunun diferansiyeli $dy = 0.5x^{-0.5}dx$ olduğuna göre $x_o = 4$ noktasında $dy = 0.25dx$ olur. O halde, $f(x_o + dx) \approx f(x_o) + dy = f(4) + 0.25dx$ ifadesi $dx = 0.0001$ için

$$f(4.0001) = f(4) + dy = 2 + 0.25(0.0001) \text{ olur.}$$

Buradan da $(4.0001)^{0.5} = 2 + 0.000025 = 2.000025$ olarak hesaplanır ki hesap makineleri $(4.0001)^{0.5}$ için 2.0000249998 vermektedir.

ii. ln(1.03) sayısını hesaplamak için $d\ln x = dx/x$ diferansiyelini $x_o = 1$ noktasında kullanırsak $\ln 1 = 0$ olduğuna göre $d\ln(1 + dx) = \ln 1 + dx/1 = dx$ elde ederiz. Burada, $dx = 0.03$ olduğuna göre $\ln(1.03) = 0.03$ olur ki hesap makinesi bu sayı için 0.02955 vermektedir. Dolayısı ile

$$\ln(1 + g) \approx g$$

küçük g değerleri için kabul edilebilir bir yaklaşık değerdir.

iii. **(Marjinal kavramı)** İktisatta çok sık karşılaşılan "marjinal" kavramı aslında türev ve diferansiyele iktisatçıların verdiği isimdir.

Tüketim fonksiyonu: Tüketim harcamalarını milli gelirin

$$c = c(y)$$

gibi türevlenebilir bir fonksiyonu olarak kabul edersek, tüketimin diferansiyeli

$$dc = c'dy$$

olur. Bu da ("küçük değişimler" için) "gelir dy kadar değiştiğinde tüketim $c'dy$ kadar değişir" demektir. Burada gelir artışının yarattığı tüketim artışı c' kadardır ve

$$c' = \text{MPC} = \text{milli gelire göre marjinal tüketim eğilimi}$$

olarak bilinir. Burada "marjinal" "küçük değişimler için" anlamına gelmektedir. Çünkü, ancak marjinal değişiklikler için diferansiyel bize tüketimi teğet doğru üzerinde iyi tahmin etme olanağı verir. Dolayısı ile $c' > 0$ ise $dy > 0 \Rightarrow dc > 0$, yani gelirde marjinal bir artış tüketim de c' kadar marjinal artış yaratır. Dolayısı ile iktisaden anlamlı varsayım $c' > 0$ varsaymaktır. Buna ek olarak tüketim artışının (dc) gelir artışından fazla olamayacağı da varsayılır. Bu da $c' < 1$ olması demektir: $0 < c' < 1$ ise $dy > 0$ için $dc = c'dy \Rightarrow dy > dc > 0$ olur: gelir arttığında tüketim artar ama gelirden az artar. Dolayısı ile, tüketim fonksiyonu genellikle, (milli gelirin fonksiyonu olarak)

$$c = c(y),\ 0 < c' < 1$$

biçiminde verilir.

Vergi Fonksiyonu: Kamunun vergi gelirleri

$$t = t(y),\ 0 < t' < 1$$

biçiminde bir fonksiyon olarak verildiğinde, biz

$$t' = \text{MVO} = \text{marjinal vergi oranı}$$

diyerek, $dt = t'dy$ diferansiyelinden, milli gelirde marjinal bir artış olduğunda ($dy > 0$ ise), vergilerde $dy > dt > 0$ olacak şekilde marjinal bir artış olacağı sonucuna varırız. Dolayısı ile

gelir arttığında vergiler artar ama gelirden az artar ve doğal olan da budur. Gelir artışının tamamı vergilendirilmez, ama gelir artarsa vergiler artar. Tekrar tüketim fonksiyonuna dönersek, daha iyi bir modelleme tüketimin harcanabilir gelirin fonksiyonu olduğunu varsaymaktır:

$$c = c(y^d),\ 0 < c' < 1.\ \text{Bu durumda}$$

$$c' = \text{harcanabilir gelire göre marjinal tüketim eğilimi,}$$

yani harcanabilir gelirde marjinal bir artışın yol açacağı tüketim artışı olarak yorumlanır. Eğer, buna ek olarak

$$y^d = y - t(y)$$

bilgisi de verilmişse,

$$dy^d = dy - t'dy = (1 - t')dy$$

olur (gelir artınca harcanabilir gelir $(1 - t')dy$ kadar artar, çünkü $t'dy$ kadarı vergi artışı olmaktadır). Bunu tüketimin diferansiyelinde yerine koyarsak:

$$dc = c'dy^d = c'(1 - t')dy$$

elde ederiz ve burada

$$c'(1 - t') = \text{milli gelire göre marjinal tüketim eğilimi olur:}$$

milli gelirde marjinal bir artış $dy^d = (1 - t')dy$ kadar harcanabilir gelir artışı, oradan da $c'(1 - t')dy$ kadar tüketim artışı yaratır.

İthalat Fonksiyonu: Bir ekonominin yaptığı toplam ithalat

$$m = t(y),\ 0 < m' < 1$$

biçiminde bir fonksiyon olarak verildiğinde, biz

$$m' = \text{MİE} = \text{marjinal ithalat eğilimi}$$

diyerek, bunu tüketim ile benzer şekilde yorumluyoruz. $dm = m'dy$ diferansiyelinden, milli gelirde marjinal bir artışın ($dy > 0$ ise), ithalatta $dy > dm > 0$ olacak şekilde marjinal bir artışa yol açacağı sonucuna varırız. Dolayısı ile gelir arttığında ithalat artar ama gelirden az artar: ekonomideki birimler gelir artışının tamamını ithal mallara harcamazlar, ama bir kısmını ithal mallara harcarlar.

Marjinal Üretkenlik: Etkin tekniklerin bir fonksiyon olarak ifadesine

$$y = f(L)$$

üretim fonksiyonu demiştik. Şimdi bu fonksiyonun türevlenebilir olduğunu varsayalım. O halde,

$$dy = f'(L)dL$$

diferansiyeli bize girdi kullanımında marjinal bir artışın (dL) ne kadar üretim artışı (dy) yaratacağını gösterir. İşte bu nedenle,

$$f'(L) = L \text{ girdisinin marjinal üretkenliği}$$

olarak bilinir. Şimdi, $f'(L)$ nin işaretinin ne olması gerektiğini araştıralım. $f'(L) < 0$ ise, L girdisinde (marjinal) bir artış üretimde (marjinal) bir düşüşe yol açacak, yani daha fazla girdi ile daha az üretim yapılıyor olacaktır. Bu da üretim fonksiyonunun etkin tekniklerin ifadesi olduğu kurgusuyla çelişir. O halde, türevlenebilir bir üretim fonksiyonu,

$$y = f(L),\ f'(L) > 0$$

şartını sağlamalıdır ve L girdisinin marjinal üretkenliği pozitif olmalıdır.

v. **(logarimik diferansiyel, büyüme oranları ve esneklik)**

Bir X değişkeni X_o, X_1 değerleri alıyor olsun.

$$\frac{X_1 - X_o}{X_o} = \frac{\Delta X}{X_o}$$

oranı bize X değişkeninin başlangıç değerine nispetle değişmesinin (kesir) olarak ifadesidir ve genellikle 100 ile çarpılarak yüzde değişme olarak değerlendirilir. Örneğin, X milli gelir (fiyat endeksi) ise oran milli gelirin büyüme (enflasyon) oranı olur. Şimdi, bu oranda dX = ΔX koyarsak, küçük dX değerleri için, (kesir olarak ifade edilmek üzere) $\frac{dX}{X}$ elde ederiz. Ama bu ifade lnX fonksiyonunun diferansiyelidir. O halde, X sürekli bir değişken olmak üzere

$$d\ln X = f'(X)dX = \frac{1}{X}dX$$

bize X in değişme (büyüme) oranını verir. Örneğin, $X = X_o(1 + g)^t$ uyarınca belirlenen bir değişken ise $\ln X = \ln X_o + t\ln(1+g)$, dlnX = gdt ya da $\frac{d\ln X}{dt} = g$ olur ki bu da bize X in t (= zaman) içinde büyüme oranını verir (ln(1 + g) = g yaklaşık değerini kullandığımıza dikkat ediniz).

Şimdi, bir y = f(x) fonksiyonu üzerinde iki nokta (x_o, y_o ve x_1, y_1) biliyorsak,

$$\frac{(y_1 - y_o)/y_o}{(x_1 - x_o)/x_o} = \frac{\Delta y / y_o}{\Delta x / x_o} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x_o}{y_o}$$

oranı bize "y deki yüzde değişme" nin "x deki yüzde değişme" ye oranını verir. Dolayısı ile oran, diyelim –0.7 ise, "x de %1 lik bir artış," "y de %0.7 lik bir azalışa yol açar" biçiminde yorumlanır ve iktisatta esneklik olarak bilinen şeydir. Tahmin edileceği gibi seçilen iki nokta biri birine uzaksa bu yolla elde edilen esneklik daha fazla hata içerecektir. (y_o/x_o) bir sayı olduğuna göre, yukarıdaki ifadenin $\Delta x \to 0$ için limiti

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{y}{x} = \frac{y}{x}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)\frac{x}{y} = \varepsilon$$

olur ve bu da bize seçilen bir noktada fonksiyonun nokta–esnekliğini (ε) verir. Dolayısı ile, Δx küçük olmak üzere önceki formül nokta esnekliğinin yaklaşık değerini vermektedir. Esneklik için daha faydalı bir formül bulmak mümkündür. Şimdi, Δy = dy, Δx = dx koyarsak, dy/y = dlny, dx/x = dlnx olduğuna göre:

$$\varepsilon = \frac{dy/y}{dx/x} = \frac{d\ln y}{d\ln x}$$

elde edilir ve bu ε = f′(x)y/x ifadesine özdeştir. Bunu görmek için zincir kuralıyla

$$\frac{d\ln y}{d\ln x} = \frac{d\ln y}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\ln x} = \frac{1}{y}(f')x = f'(x)\frac{x}{y}$$

buluruz. Bu da esnekliğin hesaplanmasında kolaylık sağlar. Örneğin, q(p) = 10/p talep fonksiyonu ise lnq = ln10 – lnp ve ε = d(lnq)/d(lnp) = –1 olarak hemen bulunur. Aynı hesaplamayı uzun yoldan yapsaydık: $\varepsilon = q'\frac{p}{q} = \frac{-10}{p^2}\frac{p}{10/p} = -1$ bulunurdu.

3.4 YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREV

Teorem 3.7 (Ortalama Değer Teoremi)

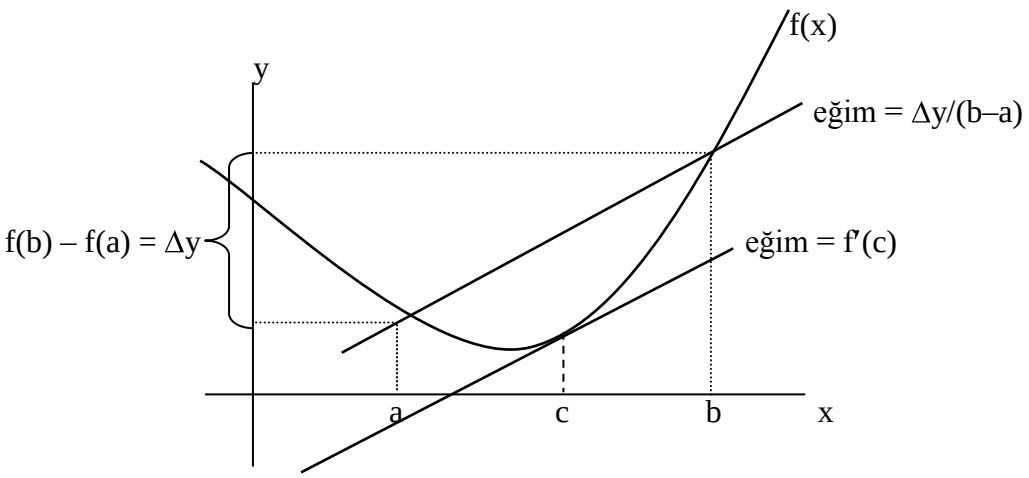
f: [a, b]→R üzerinde sürekli ve (a, b) üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. O halde,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

ya da

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır.



Şekil 4.4. Ortalama Değer Teoremi

Ortalama değer teoreminin geometrik anlamı gayet basittir. Şekil 4.4. de görüldüğü gibi [f(b) – f(a)]/(b – a) fonksiyonun grafiği üzerinde (a, f(a)), (b, f(b)) noktalarını birleştiren kirişin eğimidir. Teoreme göre bir $c \in (a, b)$ için fonksiyonun eğimi, yani $f'(c)$, bu kirişin eğimine eşit olmalıdır. Teoremin şartları sağlandığında

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

olur. Yani f(b) değerini f(a)'dan başlayarak $\Delta x = (b - a)$ için eğimin bilmediğimiz bir "c" noktasındaki değerini kullanarak tam olarak bulabiliriz. Genel olarak $x_o \in [a, b]$ için $x \neq x_o \in [a, b]$ olduğunda teoremi $[x, x_o]$ aralığına uygularsak, bir $c \in [x, x_o]$ için

$$f(x) = f(x_o) + f'(c)(x - x_o)$$

olmalıdır. Dikkat edilirse bu eğimi $f'(c)$ olan ve $(x_o, f(x_o))$ noktasından geçen doğru üzerinde yapılan hesaplamadır. Bildiğimiz gibi x_o a yakın x değerleri için eğimi $f'(x_o)$ olan ve $(x_o, f(x_o))$ noktasından geçen doğru üzerinde $f(x) \approx f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$ olmaktadır. Ortalama değer teoremi şunu demektedir: bir x_o noktasından başlayarak herhangi bir x için f(x) in değerini x_o ile x arasında bir c noktasındaki türevi kullanarak tam olarak ifade edebiliriz

Tanım 3.6 Yüksek Mertebeden Türev

i. **(C^1 fonksiyonlar)** f: (a, b) $\to$ R türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer, $f'(x) \in C$ ise (C ile sürekli fonksiyonlar kümesini gösterdiğimizi hatırlayınız) $f \in C^1$ dir diyeceğiz. Dolayısı ile C^1 fonksiyonlar türevi sürekli olan fonksiyonlardır.

ii. **(İkinci türev ve C^2 fonksiyonlar)** f: (a, b) $\to$ R C^1 bir fonksiyon olsun. Eğer, f': (a, b) $\to$ R fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon ise $(f')' = f''$, $D(Df) = D^2f$ ya da $\frac{d}{dx}(\frac{df}{dx}) = \frac{d^2 f}{dx^2}$ olarak gösterilir ve f(x) fonksiyonun ikinci türevidir denir. Eğer, $f'' \in C$ ise, $f \in C^2$ yazacağız: C^2 fonksiyonlar iki türevinin ikisi de sürekli olan fonksiyonlardır.

iii. **(n.ci mertebeden türev ve C^n fonksiyonlar)** f: (a, b) $\to$ R C^n bir fonksiyon ise n.ci türevi $f^{(n)}$, D^nf ya da $\frac{d^n f}{dx^n}$ olarak gösterilir. C^n ilk n türevi sürekli olan fonksiyonlardır.

Buna göre $f(x) = x^2 \in C^2$ dir. $f(x) = e^x \in C^\infty$ dur. $f(x) = x^3 - x^2$ ise $f' = 3x^2 - 2x$, $f'' = 6x - 2$, $f''' = 6$ olur ve $f(x) \in C^3$ tür. Öte yandan,

Aşağıdaki fonksiyonların ilk üç türevini bulunuz:
i. $y = \ln x$ ii. $y = x^2 + 2x + 3$ iii. $y = x^4 - x^3 + 2x^2$ iv. $y = 1/(1 - x^2)$

Şimdi, $f(x) \in C^2$ bir fonksiyon olsun. Bir a noktasından başlayarak

$$f(x) \approx f(a) + dy = f(a) + f'(a)(x - a)$$

doğrusal yaklaşık değer hesaplamasının hata içereceğini biliyoruz. Öte yandan, ortalama değer teoreminden

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a)$$

olacak şekilde bir $a < c < x$ olduğunu biliyoruz, ama c'nin değerini bilmiyoruz. Varsayım gereği f' sürekli türevi haiz olduğuna göre, ortalama değer teoremini $f'(x)$ fonksiyonuna [a, c] aralığında uygularsak

$$f'(c) = f'(a) + f''(\alpha)(c - a)$$

olacak şekilde bir $\alpha \in (a, c)$ olduğu sonucuna varırız. O halde, [a, x] aralığında

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(\alpha)(x - a)(c - a)$$

olacak şekilde $a < c < x$, ve $a < \alpha < c$ vardır. Böylece birinci türevin "a" noktasındaki değerini kullanabiliriz, ama burada bilmediğimiz iki sayı oluşmaktadır: c ve α. Bu bilmediğimiz sayılar yerine bildiğimiz sayılar koyarsak, hatayı ikinci türevi içeren terime kaydırmış oluruz. Burada dikkat edilirse α sayısı a sayısına c'den daha yakındır. Eğer, $\alpha = a$, $c = (a + x)/2$ koyarsak, $c - a = a/2 + x/2 - a = (x - a)/2$ olacağı için:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(a)(x - a)^2$$

elde ederiz. Bu da bize "ikinci dereceden yaklaşık değer" verir ve $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$, doğrusal yaklaşık değerine nispetle daha iyidir.

Örneğin, $f(x) = x^3$, $a = 1$ olsun ve $x = 1.1$ için $f(x)$ in değerini iki yaklaşımla hesaplayalım. Burada, $f(1) = 1$, $f'(1) = 3$, $f''(1) = 6$, $(x - a) = 0.1$ olduğuna göre

doğrusal yaklaşık değer: $f(1.1) = 1 + 3(0.1) = 1.3$

ikinci dereceden yaklaşık değer: $f(1.1) = 1.3 + (1/2)6(0.1)^2 = 1.33$

elde edilir ve 1.331 gerçek değerine göre, ilkinde hata = 0.031, ikincide hata = 0.001 olmaktadır. Burada x^3 fonksiyonunun üçüncü türevi ($y''' = 6$) sıfırdan farklı olduğu için, ikinci dereceden yaklaşık değer de hata içermektedir, ama "daha yaklaşık" bir değer vermektedir.

Eğer $n > 2$ için $f^{(n)} = 0$, yani $f \in C^2$ ise,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(a)(x - a)^2$$

olur, yani "ikinci dereceden yaklaşık değer" tam değeri verir.

Buradan anlaşılacağı üzere bir $f(x)$ fonksiyonunun yüksek mertebeden türevleri varsa bunları kullanarak yapılan hatayı daha yüksek mertebeden türevi içeren terimlere aktararak giderek daha iyi yaklaşık değerler bulabiliriz. Bu fikir genel olarak Taylor teoreminde ifade edilir.

3.5 MONOTON FONKSİYONLAR VE BİRİNCİ TÜREVİN ANLAMI

Bir noktada türevi pozitif (negatif) olan bir fonksiyonun o noktada diferansiyeli $dy = f'(x_o)dx$ de pozitif (negatif) olur yorumuyla $dx > 0$ ise $dy > 0$ (< 0) olur sonucuna ulaştık. Şimdi, bir aralık üzerinde türevi pozitif, negatif ya da sıfır olan fonksiyonlarla ilgili genel bir sınıflandırma yapmak istiyoruz.

Tanım 3.7 Monoton fonksiyonlar

$f: D \subseteq R \to R$ bir fonksiyon olmak üzere:

i. **(monoton artan fonksiyon)** Her $x_1, x_2 \in D$ için $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f D üzerinde monoton artan (ya da sadece artan) bir fonksiyondur denir.

ii. **(monoton azalan fonksiyon)** Her $x_1, x_2 \in D$ için $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa f D üzerinde monoton azalan (ya da sadece azalan) bir fonksiyondur denir.

Uyarı: Doğal olarak her $x_1, x_2 \in D$ için $f(x_1) = f(x_2)$ oluyorsa f D üzerinde sabit bir fonksiyondur denir.

Ortalama değer teoremi kullanılarak aşağıdaki önemli sonuç ispatlanabilir:

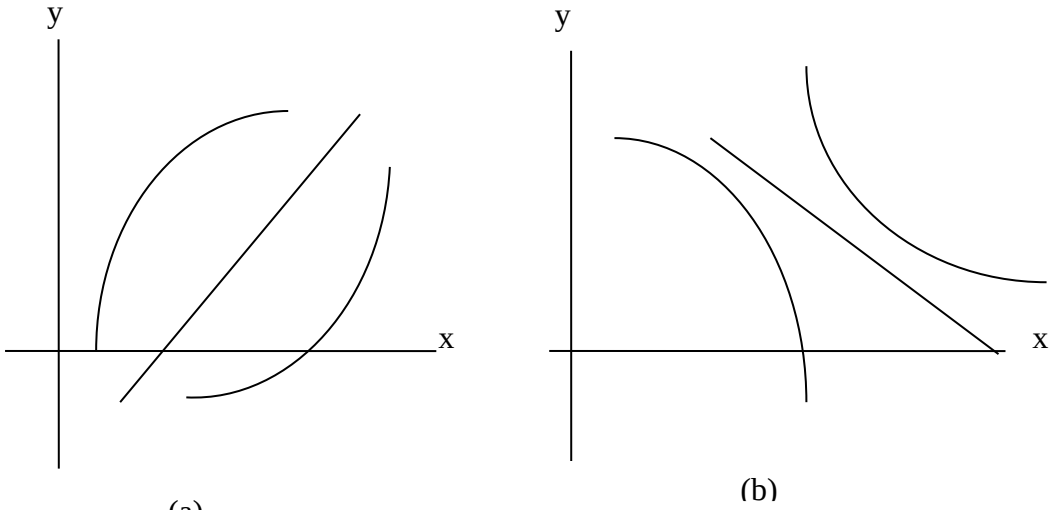
Teorem 4.8. f: [a, b]→R üzerinde sürekli iç[a, b] = (a, b) üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. O halde,

i. Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) = 0$ oluyorsa f(x) [a, b] üzerinde sabit bir fonksiyondur.

ii. Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0$ oluyorsa f(x) [a, b] üzerinde artan bir fonksiyondur.

iii. Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) < 0$ oluyorsa f(x) [a, b] üzerinde azalan bir fonksiyondur.

iv. g: [a, b]→R üzerinde sürekli iç[a, b] = (a, b) üzerinde türevlenebilir başka bir fonksiyon ise ve her $x \in (a, b)$ için $f'(x) = g'(x)$ oluyorsa $f(x) - g(x)$ sabit bir fonksiyondur (yani bir aralık üzerinde türevleri eşit olan iki fonksiyon bir sabit farkıyla eşittir).



Şekil 4.5. Artan ve Azalan Fonksiyonlar

Buna göre Şekil 4.5. (a) panelindeki her üç fonksiyon da artandır ve türevleri (eğimleri) pozitiftir. Şekil 4.5. (b) panelindeki her üç fonksiyon da azalandır ve türevleri (eğimleri) negatiftir. Dikkat edileceği gibi türevin işareti bize fonksiyonun artan ya da azalan olacağını söylemekte ama şekildeki üç durum arasında ayrım yapmamıza olanak vermemektedir.

Örnek 4.8.

i. $y = e^x$ fonksiyonu R üzerinde artan bir fonksiyondur, çünkü her $x \in R$ için $y' = e^x > 0$ dir.

ii. $x \in R$ için $f'(x) = 2x$ ve $g'(x) = 2x$ olsun. Bildiğimiz gibi türevi 2x olan fonksiyon x^2 fonksiyonudur. O halde, $f(x) = x^2$ ise $g(x) = c + x^2 = c + f(x)$ olmalıdır ($c \in R$ herhangi bir sabit olmak üzere).

iii. İktisadi modellerde bir fonksiyon tanımlandığında genellikle türevinin işareti ile birlikte verilir. Örneğin,

$X = X(q)$, $X' > 0$

denklemi verildiğinde, biz X değişkeninin bir "q" değişkeninin artan bir fonksiyonu olduğunu biliyoruz. Daha bildik bir örnek ise basit piyasa modelidir:

$q^d = f(p)$, $f' < 0$, (talep fonksiyonu)

$q^s = g(p)$, $g' > 0$, (arz fonksiyonu)

$q^d = q^s$ (denge koşulu)

modelinde, talep "p = fiyat" değişkeninin azalan, arz "p"nin artan fonksiyonlarıdır. Buradan. talep fazlası fonksiyonu tanımlarsak:

$h(p) = f(p) - g(p)$ (talep fazlası fonksiyonu)

yukarıdaki varsayımlar altında

$h'(p) = f'(p) - g'(p) < 0$

olması gerektiğini buluruz. Buna göre, talep fazlası fonksiyonu fiyatın azalan bir fonksiyonudur: fiyat arttıkça talep fazlası azalır.

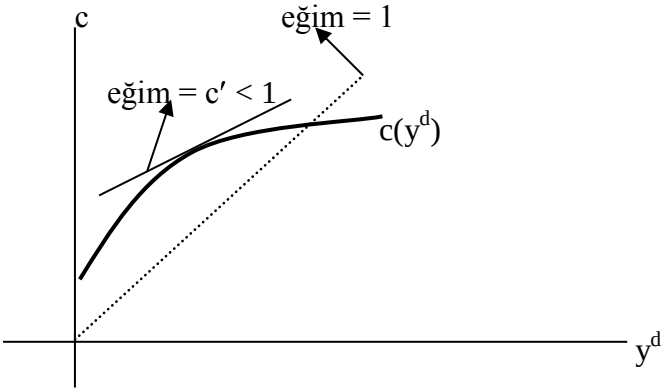
iv. Basit bir makroekonomik model:

$c = c(y^d)$, $0 < c' < 1$ (tüketim fonksiyonu)

$y^d = y - t$ (harcanabilir gelir tanımı, y = milli gelir)

$t = t(y)$, $0 < c' < 1$ (vergi fonksiyonu)

verilmiş olsun. Burada, MPC = harcanabilir gelire göre marjinal tüketim eğilimi = c', varsayım gereği pozitif olduğuna göre tüketim harcanabilir gelirin artan bir fonksiyonudur. Ama MPC < 1 olduğundan, tüketim fonksiyonunun eğimi her noktada eğimi bir olan doğrudan daha azdır (aşağıdaki şekli inceleyiniz).



Dolayısı ile gibi tüketim artışı harcanabilir gelir artışından azdır. Aynı sonuç vergi fonksiyonu için de geçerlidir. t(y) fonksiyonunu y^d tanımında yerine koyunca $y^d = y - t(y)$, buradan da

$$c = c(y - t(y))$$

elde edilir ve zincir kuralıyla

$$\frac{dc}{dy} = c' \frac{d(y - t(y))}{dy} = c'(1 - t')$$

elde edileceğini daha önce de görüştük. Modelin varsayımlardan $0 < c' < 1$ ve $0 < (1 - t') < 1$ olduğuna göre $0 < dc/dy < 1$ olmalıdır: milli gelire göre marjinal tüketim eğilimi de (0, 1) aralığındadır.

1. Aşağıdaki fonksiyonların artan/azalan oldukları aralıkları bulunuz:

i. $y = x^2 - 2x$
ii. $y = x^3 - x^2$
iii. $y = x^3 + x^2 - x$
iv. $y = x^{0.5} - x$

2. $q^d = 1/p$ (talep fonksiyonu)
$q^s = p/2$ (arz fonksiyonu)
modelinde talep fazlası fonksiyonunu bulunuz ve artan/azalan olduğunu belirleyiniz.

3.6 İKİNCİ TÜREVİN ANLAMI: İÇBÜKEY VE DIŞBÜKEY FONKSİYONLAR

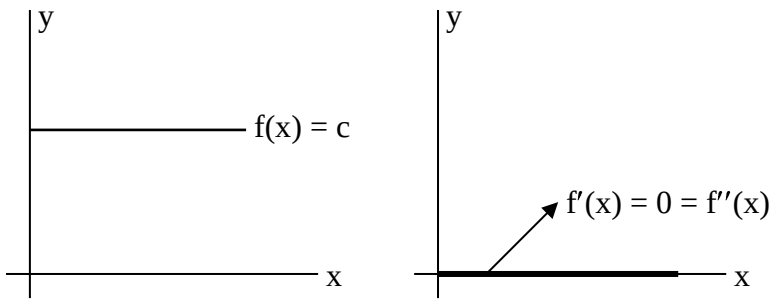
Birinci türevin işaretine bakarak bir fonksiyonun artan/azalan ya da sabit olduğunu anlıyoruz. Benzer şekilde ikinci türeve bakarak $f'(x)$ türev fonksiyonunun artan/azalan ya da sabit olduğunu anlarız. Öyleyse,

$f'' > 0$ ise, $f'(x)$ artan bir fonksiyondur,
$f'' = 0$ ise $f'(x)$ sabit bir fonksiyondur,
$f'' < 0$ ise $f'(x)$ azalan bir fonksiyondur.

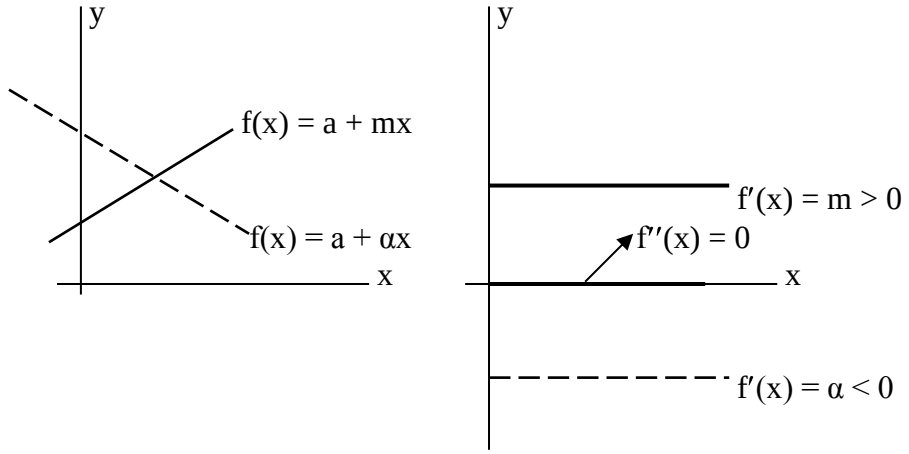
Burada yapmak istediğimiz $f'(x)$ türev fonksiyonunun artan/azalan ya da sabit olmasının $f(x)$ için ne anlama geldiğini araştırmaktır.

1. $f'' = 0$ durumu: Önce, daha kolay olan $f'' = 0$ durumunu ele alalım. Bu durumda $f' = c$ gibi sabit bir fonksiyon olmalıdır. Burada üç durum söz konusu olabilir:

i. Eğer, $f'(x) = c = 0$ ise $f(x) = c$ gibi sabit bir fonksiyondur.



ii. Eğer, $f'(x) = m > 0$ ise, $f(x)$ sabit eğimli artan bir fonksiyondur, yani pozitif eğimli bir doğrudur: $f(x) = a + mx$ dir.



iii. Eğer, $f'(x) = \alpha < 0$ ise f(x) sabit eğimli azalan bir fonksiyondur: $f(x) = a + \alpha x$ dir.

Örneğin, $f(x) = 2 + 3x$ ise, $f'(x) = 3$, $f''(x) = 0$ dır. $f(x) = 2 - x$ ise, $f'(x) = -1$, $f'' = 0$ dır.

2. $f'' \neq 0$ durumu:

Şimdi, $f(x): D \subseteq R \to R$ fonksiyonun bir $x_o \in$ içD noktası etrafında ikinci mertebeden Taylor açılımını yaparsak x_o ve x arasında kalan bir c için

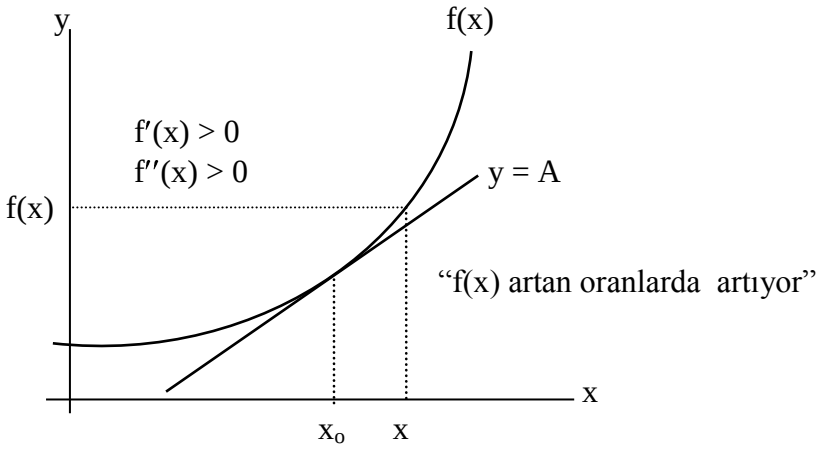
$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{1}{2} f''(c)(x - x_o)^2 = A + \frac{1}{2} f''(c)(x - x_o)^2$$

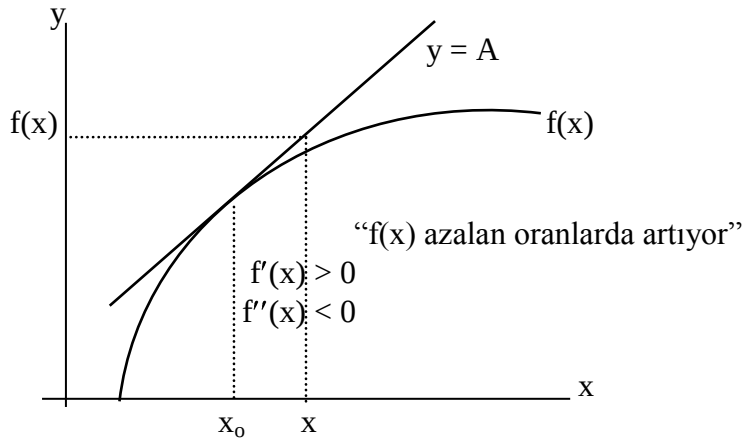
elde ederiz. Burada $A = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$ x_o noktasında fonksiyona teğet olan doğru üzerindeki değerdir. Buna göre, $(x - x_o)^2 > 0$ olduğu için, f(x) değeri

$f''(c) > 0$ ise x_o daki teğet doğrusunun üstünde $[f(x) > A]$

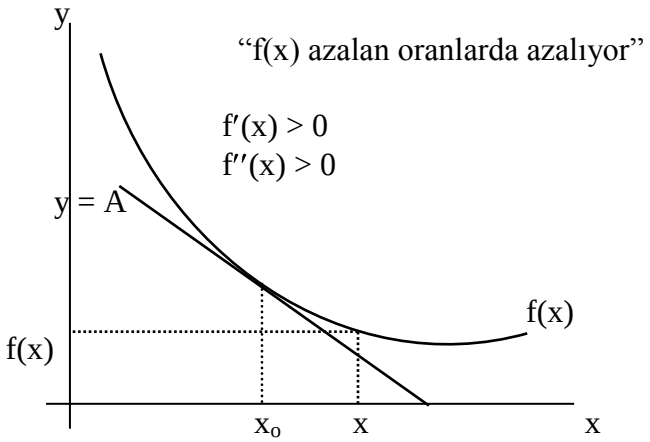
$f''(c) < 0$ ise x_o daki teğet doğrusunun altında $[f(x) < A]$

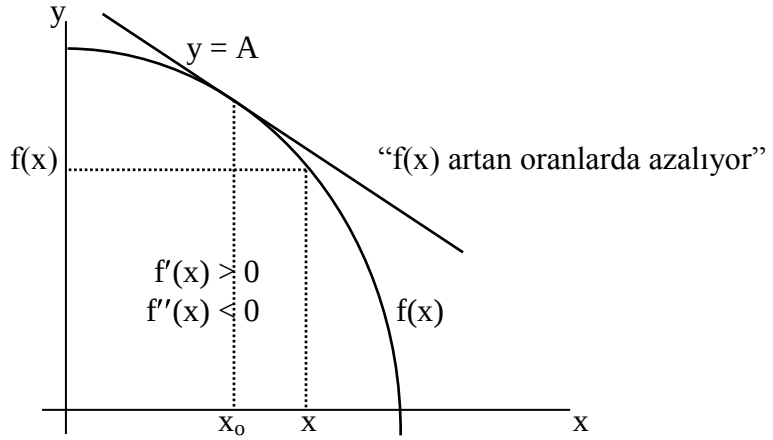
kalır. Dolayısı ile bir $\varepsilon > 0$ için $x \in B(x_o, \varepsilon)$, yani x_o ve yakın cıvarında, $f''(x) > 0$ oluyorsa fonksiyon değerleri o cıvarda teğet doğrunun üstünde; $f''(x) < 0$ oluyorsa fonksiyon değerleri o cıvarda teğet doğrunun altında kalır. Dikkat edilirse $f'(x)$ in işaretinden bağımsız olarak, yani fonksiyon artan da, azalan da olsa, bu sonuç geçerlidir. Aşağıdaki şekilleri inceleyiniz.





Yukarıdaki şekiller her x için f′(x) > 0 ve f′′(x) in aynı işaretli (pozitif ya da negatif) olduğu varsayımıyla çizilmiştir. Dolayısı ile artan bir fonksiyon için pozitif ikinci türev fonksiyon değerlerinin artan oranlarda arttığı anlamına gelir. Çünkü, artışlar teğet doğru üzerinde olsaydı sabit olurdu, ama hep teğet doğru üstünde kalındığına göre, x arttığında f(x) in değeri daha fazla artmaktadır. Benzer şekilde, artan bir fonksiyon için negatif ikinci türev fonksiyon değerlerinin azalan oranlarda arttığı anlamına gelir. Çünkü, hep teğet doğrunun altında kalınarak sabit artışa göre daha az artış olur.



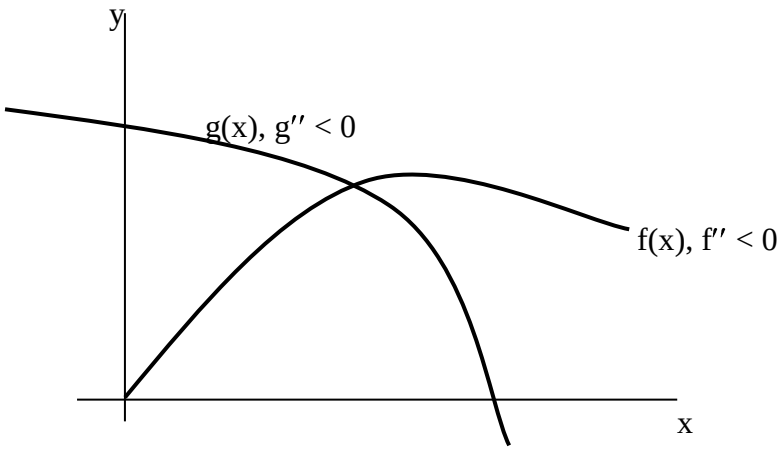


Yukarıdaki şekiller her x için $f'(x) < 0$ ve $f''(x)$ in aynı işaretli (pozitif ya da negatif) olduğu varsayımıyla çizilmiştir. Dolayısı ile azalan bir fonksiyon için pozitif ikinci türev fonksiyon değerlerinin azalan oranlarda azaldığı anlamına gelir. Çünkü, azalmalar teğet doğru üzerinde olsaydı sabit olurdu, ama hep teğet doğru üstünde kalındığına göre, x arttığında f(x) in değeri daha az azalmaktadır. Benzer şekilde, azalan bir fonksiyon için negatif ikinci türev fonksiyon değerlerinin artan oranlarda azaldığı anlamına gelir. Çünkü, hep teğet doğrunun altında kalınarak sabit artışa göre daha fazla azalış olur.

Dolayısı ile ikinci türev bize Şekil 4.5'te gösterilen fonksiyonları ayırt etme olanağı vermektedir.

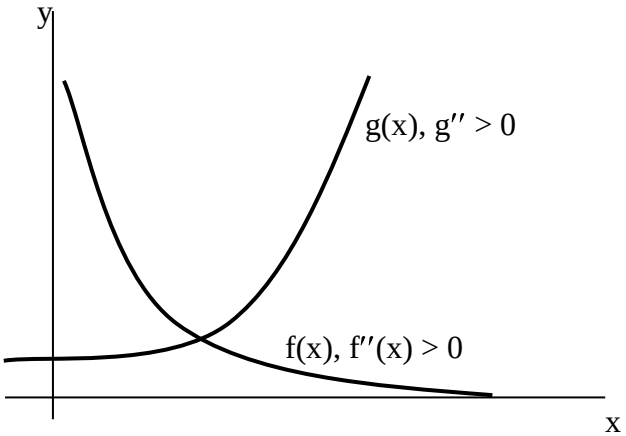
Tanım 4.6. İçbükey ve Dışbükey Fonksiyonlar

i. **(İçbükey (concave) fonksiyonlar)** $f(x): [a, b] \to R$, $f \in C^2$ ve her $x \in [a, b]$ için $f''(x) < 0$ ise f(x) içbükey bir fonksiyondur denir.



Şekil 4.6. İçbükey Fonksiyonlar: g(x) ve f(x) içbükeydir.

i. **(Dışbükey (convex) fonksiyonlar)** $f(x): [a, b] \to R$, $f \in C^2$ ve her $x \in [a, b]$ için $f''(x) > 0$ ise f(x) dışbükey bir fonksiyondur denir.



Şekil 4.7. Dışbükey Fonksiyonlar: g(x) ve f(x) dışbükeydir.

Uyarı: Görüldüğü gibi içbükey ve dışbükeylik tamamen ikinci türevle nitelenen özelliklerdir. Birinci türevinin işareti ne olursa olsun bir fonksiyonun ikinci türevi negatifse fonksiyon içbükey, pozitifse fonksiyon dışbükeydir. İkinci türevin sıfır olduğu durumda fonksiyonun $y = a + mx$ biçiminde olduğunu biliyoruz ve fonksiyon hem dışbükey hem de içbükey olarak addedilir.

Örnek 4.9.

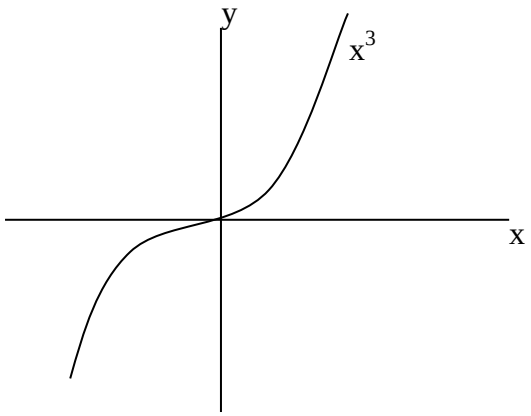
i. $f(x) = x^2$ fonksiyonu dışbükeydir, çünkü $f' = 2x$ ve $f'' = 2 > 0$ dır.

ii. $x > 0$ için $y = 1/x = x^{-1}$ fonksiyonu dışbükeydir, çünkü $y' = -x^{-2}$, $y'' = 2x^{-3} > 0$ dır. Fonksiyonun grafiği Şekil 4.7. deki f(x) in grafiği gibidir.

iii. $x > 0$ için tanımlanan $y = \ln x$ içbükey bir fonksiyondur, çünkü $y' = 1/x$ ve $y'' = -1/x^2 < 0$ dır.

iv. $x \geq 0$ için $y = \sqrt{x}$ içbükeydir, çünkü $y' = 0.5x^{-0.5}$ ve $y'' = -0.25x^{-1.5} < 0$ dır.

v. $y = x^3$ ise $y' = 3x^2$ ve $y'' = 6x$ olur. Dolayısı ile
$x < 0$ için $y'' < 0$ (fonksiyon içbükey),
$x > 0$ için $y'' > 0$ (fonksiyon dışbükey)
olur. Fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir:



İkinci türevin sıfır olduğu noktada fonksiyonun içbükeylikten dışbükeyliğe geçtiğine dikkat ediniz.

v. **(Azalan Getiriler)** Daha önce türevlenebilir bir üretim fonksiyonu için

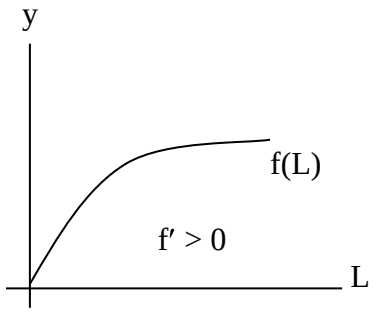
$$y = f(L),\ f'(L) > 0$$

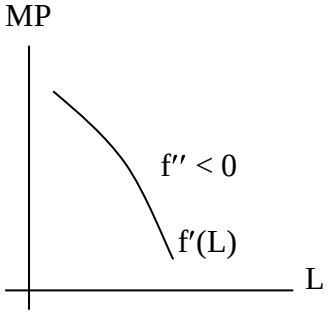
olması gerektiğini gördük. Ama, üretim fonksiyonu tanımlanırken genellikle

$$y = f(L),\ f'(L) > 0,\ f''(L) < 0$$

bilgisi verilir. Buna göre üretim fonksiyonu içbükey olmalıdır. Bunun anlamı da girdinin (emeğin) marjinal üretkenliği pozitiftir, L arttığında üretim artar, ama $f'' < 0$ olduğundan azalan oranlarda artar. Bu da iktisatta "azalan getiriler" olarak bilinen durumun ifadesidir. Üretim teorisinde içbükeylik "azalan getiriler" demektir. Bunu şöyle ifade edebiliriz: marjinal ürün

pozitiftir (üretim fonksiyonu artan bir fonksiyondur), ve azalan oranlarda artar (marjinal ürün (MP) azalan bir fonksiyondur).





vi. y = f(L), f′ > 0 içbükey bir üretim fonksiyonu olsun. Fonksiyon monoton artan olduğu için ters fonksiyonu vardır: $L = f^{-1}(y)$ yazabiliriz. f(L) bize her L için ne kadar üretim yapılabileceğini, $f^{-1}(y)$ ise bir üretim miktarını yapabilmek için gereken girdi miktarını gösterir. Şimdi, w = bir birim girdinin fiyatı (ücret) olmak üzere

$$C(y) = wL = wf^{-1}(y)$$

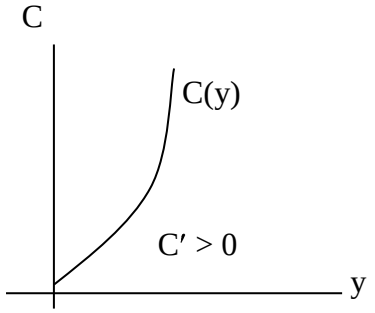
bize maliyet fonksiyonunu verir: bir y üretim düzeyi için C(y) kadar ücret ödenmelidir ki y yi üretmek için gerekli girdi sağlanabilsin. Ters fonksiyon kuralından (w > 0 bir sabittir):

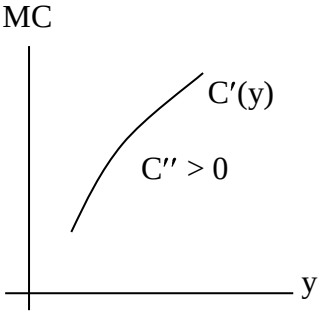
$$C' = w\frac{df^{-1}}{dy} = w\frac{1}{\frac{df}{dL}} = \frac{w}{f'}$$

elde edilir. dC = C′dy yazarsak, buradan C′ nün bize üretim miktarında küçük bir artışın ne kadar maliyet artışı yaratacağını gösterdiğini görürüz ve bu nedenle C′ marjinal maliyet olarak bilinir. Varsayım gereği f′ > 0 olduğuna göre, C′ > 0 dır, yani, üretim artarsa maliyet artar. Şimdi, bölüm kuralından (w = sabit olduğunu unutmadan)

$$C'' = \frac{-wf''}{(f')^2}$$

elde edilir. Üretim fonksiyonu içbükey varsayıldığına göre f′′ < 0, dolayısı ile C′′ > 0 olmalıdır. Üretim fonksiyonun (girdide) içbükey olmasının maliyet fonksiyonu üzerinden ifadesi maliyet fonksiyonun (çıktıda) dışbükey olmasıdır. Buna göre marjinal maliyet pozitiftir (maliyet artan bir fonksiyondur), ve artan oranlarda artar (marjinal maliyet (MC) artan bir fonksiyondur).





Bu şekilleri bir önceki örnekteki şekillerle karşılaştırınız. Örneğin, $y = f(L) = \sqrt{L}$, f′ > 0, f′′ < 0 şartlarını sağlayan (içbükey) bir üretim fonksiyonudur. Burada, girdi gereksinim fonksiyonu $L = f^{-1}(y) = y^2$ ters fonksiyonudur. O halde, (w = ücret olmak üzere)

$$C = wL = wy^2$$

fonksiyonu $f(L) = \sqrt{L}$ üretim fonksiyonuna karşı gelen maliyet fonksiyonudur ve dışbükeydir.

Çünkü,

$C' = 2wy$ (marjinal maliyet fonksiyonu)

$C'' = 2w > 0$

olmak üzere marjinal maliyet üretimde artan bir fonksiyondur. Bu örnekteki fonksiyonları çizerek inceleyiniz.

1. Aşağıdaki fonksiyonların içbükey/dışbükey oldukları aralıkları bulunuz:

i. $y = -x^2 + x^{0.5}$ ii. $y = x^2 + 1/x$ iii. $y = -x^3 + x^2$ iv. $y = (x - 1)^4$
v. $y = (1 - x)^4$ vi. $y = L^{2/3}$, $L \geq 0$ vii. $y = 25L - L^2$, $0 \leq L < 5$

3. "f(x) fonksiyonu ancak ve ancak –f(x) fonksiyonu içbükeyse, dışbükeydir." İspatlayınız.

4. f(x) ve g(x) aynı aralık üzerinde içbükey (dışbükey) fonksiyonlar ise her $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ sayısı için $h(x) = \alpha f(x) + \beta f(x)$ fonksiyonunun da içbükey (dışbükey) olduğunu ispatlayınız.