POLİNOMLAR

Tanım:

$a_0, a_1, a_2, ...a_n \in IR$ ve

$n, n-1, ...2, 1, 0 \in IN$ olmak üzere,

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x^1 + a_0$

biçimindeki ifadelere reel (gerçel) katsayılı, x değişkenine göre yazılmış **polinom** (çok terimli) denir.

P(x) polinomunun;

derecesi $der(P(x)) = n$

baş katsayısı a_n

sabit terimi a_0

$a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ katsayılarıdır.

Çok Değişkenli Polinomlar

x ve y belirsiz iki değişken olmak üzere,

$P(x, y) = ax^n + bx^{n-1}y + cx^{n-2}y^2 + ...+ y^n$

biçimindeki polinomlara **x** ve **y**'ye göre **iki değişkenli polinomlar** denir.

Örnek: $3x^3y^2 - 7xy^3 + 2x^3y + xy - y^3 + 1$ polinomu iki değişkenli bir polinomdur.

☼	**Bu tip polinomların derecelerini bulmak için, her bir terimdeki x ve y'nin ayrı ayrı kuvvetleri toplanır. Bunlardan en büyük olan, polinomun derecesi olarak alınır.**

Sıfır Polinom

Tanım: Bir P(x) polinomunun bütün katsayıları sıfır ise, bu P(x) polinomuna **sıfır polinomu** denir.

$P(x) = 0.x^n + 0.x^{n-1} + 0.x^{n-2} + ...+ 0$

P(x)= 0 biçiminde ifade edilir.

☼	**Sıfır polinomunun derecesi belirsizdir.**

Sabit Polinom

Tanım: $a_0 \neq 0$ olmak üzere;

$P(x) = 0.x^n + 0x^{n-1} + ... + a_0$

biçimindeki polinomlara **sabit polinom** denir.

P(x) = a_0 biçiminde ifade edilir.

☼	**Sabit polinomun derecesi sıfırdır.**

☼	**P(x) polinomunda sabit terimi bulabilmek için, x değişkenine sıfır verilmelidir.** **P(0) = a_0 Sabit Terim**

☼	**P(x, y) polinomunda sabit terimi bulabilmek için, x ve y değişkenine sıfır verilmelidir.** **P(0,0) Sabit Terim**

☼	**Bir P(x) polinomunun katsayılar toplamını bulabilmek için x değişkenine 1 verilmelidir.** **P(1) = Katsayılar Toplamı**

☼	**Bir P(x, y) polinomunun katsayılar toplamını bulabilmek için x ve y değişkenlerine 1 verilmelidir.** **P(1, 1) = Katsayılar Toplamı**

Çift ve Tek Dereceli Terimlerin Katsayıları Toplamı

P(x) polinomunda,

Çift dereceli terimlerin katsayılar toplamı,

$$\frac{P(1)+P(-1)}{2}$$

Tek dereceli terimlerin katsayılar toplamı,

$$\frac{P(1)-P(-1)}{2}$$

İki Polinomun Eşitliği

Dereceleri aynı ve aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olan iki polinoma **eşit polinomlar** denir.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_1x^1 + a_0$

$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ...+ b_1x^1 + b_0$

polinomları verilsin;

$P(x) = Q(x) \iff a_n=b_n\ ,\ a_{n-1}=b_{n-1},\ ....a_1=b_1,\ a_0=b_0$

Örnek:

$\dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$ ise, **A ve B nedir?**

Örnek:

$\dfrac{x+3}{x^4-x^2}=\dfrac{x+3}{x^2\left(x^2-1\right)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-1}+\dfrac{D}{x+1}$ ise, **A, B ve C nedir?**

Örnek:

$\dfrac{x+2}{x(x-1)^2(x^2-2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}+\dfrac{Dx+E}{(x^2-2)}$ ise, **A, B, C, D ve E nedir?**

Polinomlarda İşlemler

Toplama – Çıkarma:

İki veya daha fazla polinomlar toplanırken, aynı dereceli terimler toplanır. Dereceleri aynı olmayanlar aynen yazılır.

der (P(x) + Q(x)) = max (der P(x), der Q(x))

der (P(x) – Q(x))=max (der P(x), der Q(x))

der(P(x)) $\mp$ der(Q(x)) ise, iki polinomun dereceleri toplanır veya çıkarılır.

Çarpma:

İki polinomu çarpmak için her polinomun tüm terimleri birbiri ile çarpılır ve sonuçlar toplanır.

der (P(x) . Q(x)) = der P(x) + der Q(x)

Derece Hesaplama

Örnek:

$P(x) = 5x^4 - 6x^2 + 9x + 2$

$Q(x) = 2x^3 - 3x + 2$ iken,

aşağıdaki polinomların dereceleri nedir?

a) der [P(x) + Q(x)]

b) der [P(x) – Q(x)]

c) der [P(x) . Q(x)]

d) der [$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$]

e) der [P(3x–1)]

f) der [5.Q(3x^2 +2)]

g) der [P^2(x) + Q^3(x)]

h) der $[P(x^3) \,.\, Q(x^4)]$

i) der $[P^2(x^4) + Q^3(x^5)]$

j) der $[x^4.P^2(x) + x^5.Q^3(x)]$

k) der $\left[\dfrac{x^4.P^2(x)+x^3.Q^4(x)}{3.P(3x+1)+5.Q(2x-1)}\right]$

Örnek:

der[P(x).Q(x)]=4 ve der$\left[\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right]$ = 2 ise, der[Q(x)] kaçtır?

Polinomlarda Kalan Bulma

1) (x – a) ile Bölümünden Kalan

2) (ax + b) ile Bölümünden Kalan

3) (x^n + a) ile Bölümünden Kalan

4) (ax^2 +bx + c) ile Bölümünden Kalan

5) $(x – a)^n$ ile Tam Bölünmesi

şeklinde incelenir.

1) (x – a) ile Bölümünden Kalan

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} & B(x) \\ - & \\ \hline K & \end{array}$$

$$P(x) = \underbrace{\overbrace{(x-a)\,.\,B(x)}^{0}}_{0} + K$$

x – a = 0 $\Rightarrow$ x = a olup,

P(a) = (a – a) . B(a) + K

P(a) = $\cancel{0.B(a)}$ + K

P(a) = K bulunur.

	P(x)'in (x – a) ile bölümünden kalan; **P(a) = Kalan**

	P(x) polinomu tüm çarpanlarına tam bölünür. Kalan 0 olur

	P(x) polinomu (x–a).(x–b).(x–c)..... çarpımı ile tam bölünüyorsa, P(x) polinomu (x–a); (x–b); (x–c); ..... ile ayrı ayrı tam bölünür. Kalan 0 olur

	P(x) = $\dfrac{Q(x)}{B(x)}$ bölümünde P(x) bir polinom ise Q(x) polinomu B(x) polinomu ile tam bölünür.

2) (ax + b) ile Bölümünden Kalan

$$\begin{array}{r|l} P(x) & ax+b \\ \cline{2-2} \underline{-\quad\;\;} & B(x) \\ K & \end{array}$$

$$P(x) = \overbrace{\underbrace{(ax+b)}_{0} \,.\, B(x)}^{0} + K$$

$ax + b = 0 \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{b}{a}$ ise

$P\left(-\dfrac{b}{a}\right) = \left(a.\left(-\dfrac{b}{a}\right) + b\right) . B(x) + K$

$P\left(-\dfrac{b}{a}\right) = K$ bulunur.

	P(x)'in (ax + b) ile bölümünden kalan; $P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ **= Kalan**

3) (x^n – a) ile Bölümünden Kalan

	P(x)'in (x^n – a) ile bölümünden kalanı bulmak için P(x); x^n nin kuvvetlerine göre düzenlenir ve sadece x^n yerine a yazılır.

4) (ax^2 +bx + c) ile Bölümünden Kalan

$$\begin{array}{r|l} P(x) & ax^2+bx+c \\ \cline{2-2} \underline{-\quad\;\;} & B(x) \\ (mx+n) & \end{array}$$

$P(x) = (ax^2 + bx + c) . B(x) + mx + n$

	Bir P(x) Polinomu; **2. dereceden bir polinoma bölünürse kalan <u>en fazla</u> 1. dereceden bir polinom olur.** **K(x)= ax + b** **3. dereceden bir polinoma bölünürse kalan <u>en fazla</u> 2. dereceden bir polinom olur.** **K(x)= ax^2 + bx + c**

5) $(x – a)^n$ ile Tam Bölünmesi

	P(x) pol. $(x - a)^n$ ile tam bölünüyorsa; **P(a) = 0** **$P'(a) = 0$** **$P''(a) = 0$** **$P'''(a) = 0$** **.** **.** **.** **$P^{n-1}(a) = 0$**