* Adi Diff. Denklem → $y' = \cos x$, $y'' + y' + y = x + 1$

Kısmi " → $\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{du} = x + y + u$

*

$x(y'')^3 + 2x^2(y')^4 + x = y$ (2. Mertebeden, 3. Derece)

* $a_n(x) \cdot y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x) \cdot y = F(x)$

tüm türevler 1. Dereceden ise Lineer Denklem

$F(x) = 0$ ise Homojen Denklem

* $y'' + 2xy = 0$

$y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

$x = 0$ old. Başlangıç - Değer

$y'' - 3xy = 0$

$y(0) = 1$ $y(1) = 2$

$x = 0$
$x = 1$ old. Sınır - Değer

Diferansiyel Denklem Çözümü

1 Değişkenlerine Ayrılabilir Denklemler

$$\frac{F(x,y)\,dx}{y} + \frac{K(x,y)\,dy}{x} \rightarrow F(x)dx + K(y)dy$$

xy ile bölerek

2 Homojen Denklemler

$$F(x,y)dx + K(x,y)dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$ oluyorsa

$$u = \frac{y}{x} \rightarrow y = u \cdot x$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot u + x \cdot \frac{du}{dx}$$

$$u + x \cdot \frac{du}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \ldots$$

3) Tam Diferansiyel Denklemler

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

$$\boxed{\frac{P(x,y)}{dy} = \frac{Q(x,y)}{dx} \quad \text{ise Tam Dif.}}$$

$$f(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \ell(y) = c$$

$$\frac{d}{dy} f(x,y) = Q(x,y) \rightarrow \ell(y) \text{ bulunur.}$$

4) Lineer diferansiyel Denklemler

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\cdot y = K(x) \quad \text{denkleminde}$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \quad \text{olur.}$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)\cdot K(x)\,dx \quad \text{bulunur}$$

---

* Riccati Dif. Denk

$y' = P(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ $\quad$ $y = y_1 + \frac{1}{t} \rightarrow y' = y_1' - \frac{1}{t^2}\cdot t'$

dönüşümü yapılır.

$t' + [2\cdot P(x)\cdot y_1 + q(x)]\cdot t = -P(x)$ lineer denk olur.

(5) Bernoulli Diferansiyel Denklemi

$$y' + P(x)\cdot y = K(x)\cdot y^{n} \rightarrow u = y^{1-n} \text{ dönüşümü}$$

ile Lineer denkleme dönüştürülür.

$$u' = \underbrace{(1-n)\cdot y^{-n}}_{\text{ile genişletilir.}}\cdot y' \rightarrow (1-n)\cdot y^{-n} \,/\, y' + P(x)y = K(x)\cdot y^{n}$$

(6) Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Homojen Denklemler

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1\cdot y' + a_0 y = 0 \quad (a_i \in \mathbb{R})$$

Çözüm: $y = e^{mx}$ $(m \in \mathbb{R})$ formundadır.

$$a_n\cdot m^{n} + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_1\cdot m + a_0 = 0$$

$$\Delta > 0 \rightarrow m_1 \neq m_2 \rightarrow y = c_1\cdot e^{m_1\cdot x} + c_2\cdot e^{m_2\cdot x}$$

$$\Delta = 0 \rightarrow m_1 = m_2 \rightarrow y = c_1\cdot e^{m_1\cdot x} + c_2\cdot x\cdot e^{m_1\cdot x}$$

$$\Delta < 0 \rightarrow m_{1,2} = a \mp bi \rightarrow y = c_1\cdot e^{ax}\cdot \cos bx + c_2\cdot e^{ax}\cdot \sin bx$$

(7) Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Homojen Olmayan Dif. Denk.

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = F(x) \neq 0$$

$$y = y_{homojen} + y_{özel}$$

$a_n \cdot m^n + \dots$

m_1, m_2

$$\boxed{y_h = C_1 \cdot e^{m_1 x} + C_2 \cdot e^{m_2 x}}$$

$y_ö = F(x) = Ax + B \,/\, Ax^2 + Bx + C$

$y'_ö = \dots$

$y''_ö = \dots$

$A = ?\ B = ?\ C = ?$

$$\boxed{y_ö = V_1(x) \cdot e^{m_1 x} + V_2(x) \cdot e^{m_2 x}}$$

formunda yazılabilir!

$$y = y_h + y_ö$$

(8) Cauchy-Euler Denklemi

$$a_n \cdot x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 x \cdot y' + a_0 y = 0$$

$y = x^N$ formunda $\rightarrow y = C_1 \cdot x^{N_1} + C_2 \cdot x^{N_2}$

$y'' \rightarrow N \cdot (N-1)$

$y' \rightarrow N$

$y \rightarrow 1$

$a_n N(N-1) \cdot a_{n-1} \cdot N + a_0 \cdot 1 = 0$

$N_1 = ?\quad N_2 = ?$

$$y = C_1 \cdot x^{N_1} + C_2 \cdot x^{N_2}$$

9) Eğri Aileleri ve Yörüngeler

Fonksiyon denkleminde c keyfi değeri çekilir.

Fonksiyondan yerine yazılır.

Ör/

$$y = c\cdot e^{x} + \operatorname{Sin} x$$
$$-\; y' = c\cdot e^{x} + \operatorname{Cos} x$$
$$y - y' = \operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x$$

Ör/

$$y = A\cdot \operatorname{Sin}(Bx+C)$$
$$y' = A\cdot B\cdot \operatorname{Cos}(Bx+C)$$
$$y'' = -B^{2}\cdot \underbrace{A\operatorname{Sin}(Bx+C)}_{y} \rightarrow y'' = -B^{2}\cdot y$$

* $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ dif. denk. dik olan dif. denk. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

10) Dif. Denk. Günlük Hayata Uygulanması

Değişim Hızı

* Değişim hızı: $\frac{dy}{dx} = P\cdot y$

Başlangıç değeri: B

İstenen süre: n

$$y(n) = B\cdot e^{P\cdot n}$$

* **Sıcaklık Değişimi** (0°C de)

Oda Sıcaklığı: C

Verilen Süre: k

Verilen Süredeki Sıcaklık: C_v

İstenen " " : C_i

İstenen Süre: n

$$\left(\frac{C-C_i}{C}\right) = \left(\frac{C-C_v}{C}\right)^{n/k}$$

* **Yarılanma Ömrü**

Yarılanma ömrü: k

Başlangıç Miktarı: B

Geçen Süre: n

$$y(n) = B\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n/k}$$

* ~~Çoğalma Süresi~~

~~Çoğalma Süresi: k~~

~~Başlangıç Miktarı: B~~

~~Geçen Süre: n~~

$$\cancel{y(n) = B\cdot(2)^{n/k}}$$

Differansiyel Denklemler

<u>Tanım:</u> Bilinmeyen bir fonksiyon ve bu fonksiyona ait türevleri içeren denklemlere "<u>diferansiyel denklemler</u>" denir.

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$ şeklinde gösterilir.

* Bir diferansiyel denklemde yalnız bir tane bağımsız değişken varsa bu tür denklemlere "<u>Adi diferansiyel</u>" denklem denir.

$y'=\cos x$, $y''+y'+y=x+1$, $y'''+y'=e^x$ gibi

* Bir diferansiyel denklem tek bağımlı değişkenin iki veya daha çok bağımsız değişken cinsinden türevini içeriyorsa, bu tür denklemlere "<u>kısmi diferansiyel</u>" denklem denir.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2y}{dx.dy}=0$$ gibi

* Diferansiyel denklemler derken Adi Diferansiyel denklem kastedilmektedir.

<u>Diferansiyel Denklemin</u> <u>Mertebesi ve Derecesi</u>

<u>Tanım:</u> Bir diferansiyel denklemdeki en yüksek ~~mertebeden~~ dereceden türevin ~~mertebesine~~ derecesine "diferansiyel denklemin mertebesi" denir. En yüksek ~~mertebeden~~ dereceden türevin kuvvetine ise, "diferansiyel denklemin derecesi" denir.

Ö/ $x^2y'''-2xy''+3x^3(y')^2=0$ (3. Mertebeden 1. derece)

$x(y'')^3-2x^2(y')^4+x=y$ (2. Mertebeden 3. derece)

Homojen ve Lineer Denklemler

Tanım: $a_n(x)\cdot y^{(n)} + a_{n-1}(x)\cdot y^{n-1} + \dots a_1(x)\cdot y' + a_0(x) y = F(x)$

denkleminde tüm türevler birinci dereceden ise "Lineer Denklem" denir.

$F(x) = 0$ ise homojen Lineer denklem

$F(x) \neq 0$ ise homojen olmayan Lineer denklem denir.

Ö/ $y'' - 2xy' + 3y = \sin x$ → Homojen olmayan Lineer (2. M, 1. D)

$y''' + \sin x y = 0$ → Homojen, Lineer (3. M, 1. D)

$y'' + \sin x \cdot y' - 5y = 0$ → Homojen, Lineer (2. M, 1. D)

$y''' - y'' + y - e^x = 0$ → Homojen olmayan, Lineer (3. M, 1. D)

$y''' - e^x \cdot y' + y^2 = e^x$ → Homojen olmayan ve Lineer olmayan (3. M, 1. D)

$(y'')^2 - \ln x \cdot y = 0$ → Homojen, Lineer olmayan (2. M, 2. D)

$(y'')^3 + y \cdot y' - \sin x = 0$ → Homojen olmayan ve Lineer olmayan (2. M, 3. D)

Ö/ $y''' + \ln x \cdot y'' - 3y = \sin x$ diferansiyel denklemi için kaç tanesi doğrudur?

✓ I. Lineer

× II. Homojen

✓ III. 3. mertebeden

× IV. 2. dereceden

× V. Kısmi diferansiyel denklem

Ö/ $y'' - 2\cos x \cdot y' + e^x \cdot y = 0$ diferansiyel denklemi için kaç tanesi doğrudur?

✓ I. Lineer

✓ II. Homojen

× III. 2. dereceden

✓ IV. Adi diferansiyel denklem

× V. 1. mertebeden

Başlangıç-Değer ve Sınır-Değer Problemleri:

Tanım: Diferansiyel denklem ile birlikte verilen ek koşullar bağımsız değişkenin bir tek değeri için tanımlanıyorsa bu probleme "Başlangıç-Değer Problemi", birden fazla değer için tanımlanıyorsa "Sınır-Değer Problemi" denir.

Ö/ $y'' + 2xy = 0$

$y(0) = 2, \; y'(0) = -1$

$x = 0$ old. Başlangıç-Değer

Ö/ $y'' - 3xy = 0$

$y(0) = 1, \; y(1) = 2$

$x = 0$, $x = 1$ old. Sınır-Değer

Ö/ $y'' - y = 0$

$y(0) = 1, \; y(\pi) = -1$

$\left.\begin{matrix} x=0 \\ x=\pi \end{matrix}\right)$ old. Sınır-Değer

Ö/ $y'' + y = 0$

$y(0) = 1, \; y(1) = 3$

$\left.\begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix}\right)$ old. Sınır-Değer

Ö/ $y'' + e^{2x} \cdot y = 0$

$y(1) = e, \; y'(1) = e^3$

$x=1$ old. Başlangıç-Değer

Ö/ $y'' + \cos x \cdot y = 0$

$y(1) = \pi, \; y'(0) = \pi$

$\left.\begin{matrix} x=1 \\ x=0 \end{matrix}\right)$ old. Sınır-Değer

Ö/ $y'' - 2y = 0$

$y(0) = 5, \; y'(1) = 3$

$\left.\begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix}\right)$ old. Sınır Değer

Ö/ $y''' + 2y = 0$

$y(0) = 1, \; y'(0) = 2, \; y''(0) = -1$

$x=0$ old. Başlangıç-Değer

Ö/ $y''' - y'' + 2y = 0$

$y(0) = 1, \; y(e) = 2$

Problemi için aş. han. söylenemez?

A) Sınır-Değer Problemi

B) Lineer

C) Homojen

D) 3. Mertebeden

E) 2. Dereceden

Ö/ $y'' - e^x \cdot y = 3 \cdot e^x$

$y(0) = 1, \; y'(1) = e$

Problemi için aş. han. söylenemez?

A) Sınır-Değer Problemi

B) Lineer

C) Homojen

D) 2. Mertebeden

E) 1. Dereceden

Değişkenlerine Ayrılabilir Diferansiyel Denklemler

Tanım: $P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = 0$ şeklinde ifade edilen birinci mertebeden diferansiyel denklem

$$f_1(x)\cdot g_1(y)\cdot dx + f_2(x)\cdot g_2(y)\, dy = 0$$

formunda yazılabiliyorsa bu tür diferansiyel denklemlere değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklemler denir.

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\, dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\, dy = \int 0$$

genel çözümü ile hesaplanır.

Ö/ $2\cdot x^2\cdot y\cdot dx + x^3\cdot y^2\, dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\frac{2x^2 y\, dx}{\boxed{y}} + \frac{x^3 y^2\, dy}{\boxed{x^3}} = 0$$

$x^3\cdot y$ ile bölünür.

$$\frac{2x^2 y\, dx}{x^3\cdot y} + \frac{x^3 y^2\, dy}{x^3\cdot y} = 0$$

$$\int \frac{2}{x}\, dx + \int y\, dy = \int 0$$

$$\downarrow$$

$$C$$

$$\boxed{2\cdot \ln|x| + \frac{y^2}{2} + C = 0}$$ bulunur.

Ö/ $e^{3x-y}\cdot dx + e^{2x+y}\,dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\frac{e^{3x}\cdot e^{-y}\,dx}{e^{-y}} + \frac{e^{2x}\cdot e^{y}\,dy}{e^{2x}} = 0$$

$$e^{2x}\cdot e^{-y}$$

$$\frac{e^{3x}\cdot e^{-y}\,dx}{e^{2x}\cdot e^{-y}} + \frac{e^{2x}\cdot e^{y}}{e^{2x}\cdot e^{-y}}\,dy = 0$$

$$\int e^{x}\cdot dx + \int e^{2y}\cdot dy = \int 0$$

$$\boxed{e^{x} + \frac{e^{2y}}{2} = c}$$ bulunur.

Ö/ $(y^2 - xy^2)\,dx + (x + xy)\,dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\frac{y^2(1-x)\,dx}{y^2} + \frac{x\cdot(1+y)\,dy}{x} = 0$$

$$xy^2$$

$$\frac{y^2(1-x)\,dx}{xy^2} + \frac{x(1+y)\,dy}{x\cdot y^2} = 0$$

$$\frac{1-x}{x}\,dx + \frac{1+y}{y^2}\,dy = 0$$

$$\int\left(\frac{1}{x}-1\right)dx + \int\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}\right)dy = \int 0$$

$$\ln|x| - x + \frac{y^{-2+1}}{-2+1} + \ln|y| = c$$

$$\boxed{\ln|x| - x - \frac{1}{y} + \ln|y| = c}$$ bulunur.

Ö/ $x \cdot \cos y \, dx + (x^2+1) \sin y \, dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\frac{x \cdot \cos y \cdot dx}{\cos y} + \frac{(x^2+1) \cdot \sin y \cdot dy}{x^2+1} = 0$$

$$(x^2+1) \cdot \cos y$$

$$\frac{x \cdot \cos y \, dx}{(x^2+1)\cos y} + \frac{(x^2+1) \sin y \cdot dy}{(x^2+1) \cdot \cos y} = 0$$

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{\sin y}{\cos y} dy = \int 0$$

$u = x^2+1$

$du = 2x \, dx$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du - \ln|\cos y| = c$$

$$\frac{1}{2} \ln|x^2+1| - \ln|\cos y| = \ln c$$

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{\cos y} = c \rightarrow \boxed{\frac{x^2+1}{\cos^2 y} = c_1} \text{ bulunur.}$$

4. Ö/

$\left(\frac{3y^3}{x}\right) dy + y \cdot \ln x \cdot dx = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\frac{3y^3 \cdot \frac{1}{x} dy}{\frac{1}{x}} + \frac{y \cdot \ln x \cdot dx}{y} = 0$$

$$\frac{1}{x} \cdot y$$

$$\frac{3y^3 \cdot \frac{1}{x} dy}{\frac{1}{x} \cdot y} + \frac{y \cdot \ln x \cdot dx}{\frac{1}{x} \cdot y} = 0$$

$$\int 3y^2 dy + \int x \ln x \, dx = \int 0$$

$$y^3$$

$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$dv = x \, dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\boxed{y^3 + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} = c} \text{ bulunur.}$$

Ö/ sayfa 8 dacüz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec y}{x}$$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy}{\sec y} = \frac{dx}{x} \rightarrow \int \cos y\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\frac{1}{\cos y} = \sec y$$

$$\boxed{\sin y = \ln|x| + C}$$ bulunur.

sayfa 9'da da çöz

Ö/ $$\frac{dy}{dx} = \sin^2(x+y) - 1$$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$x+y=u$ olsun. $$\frac{x+y}{dx} = \frac{u}{dx} \rightarrow 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin^2(x+y) - 1 \rightarrow \frac{du}{dx} - 1 = \sin^2(u) - 1$$

$$\frac{du}{dx} = \sin^2 u$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int dx$$

$$-\cot u = x + c$$

$$-\cot(x+y) = x + c$$

$$\boxed{x + \cot(x+y) = \underbrace{-c}_{c_1}}$$ bulunur.

Ö/ $\frac{dy}{dx} = (4x+y+5)^2$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$4x+y+5=u$ olsun. $\frac{4x+y+5=u}{dx}\frac{}{dx} \rightarrow 4+\frac{dy}{dx}+0=\frac{du}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{du}{dx}-4}$ olur.

$\frac{dy}{dx} = (4x+y+5)^2 \rightarrow \frac{du}{dx} - 4 = u^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 4+u^2$

$$\int \frac{du}{4+u^2} = \int dx \rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}du}{1+\left(\frac{u}{2}\right)^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2} = x + c$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{4x+y+5}{2}\right) = x + c}$$ bulunur.

Ö/ $y' = (2x+1)^3$ veya $y' = (x+y+1)^2$ denk. çözümünü bz.

Sayfa 8'den gelen soruyu çöz.

Ö/ $y' = y$ denk. çözümünü bulunuz.

$\frac{dy}{dx} = y \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx$

$\ln|y| = x + c$

$y = e^{x+c} = e^x . \underbrace{e^c}_{c_1}$ olsun.

$\boxed{y = c_1 . e^x}$ bulunur.

Ö/ $y' = \frac{y}{x}$ denk. çözümünü bulunuz.

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln y = \ln x + c$

$\ln y - \ln x = \ln c$ olsun.

$\frac{y}{x} = c$

$\boxed{y = c . x}$ bulunur.

8/ $y' = \sin y$ denk. çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = \sin y \to \int \frac{dy}{\sin y} = \int dx \to \int \frac{\sin y}{\sin^2 y}\, dy = \int dx$$

$$\int \frac{\sin y}{1-\cos^2 y}\, dy = x + c$$

$u = \cos y$

$du = -\sin y\, dy$

$$\int \frac{-du}{1-u^2} = x + c$$

$$\int \frac{du}{u^2-1} = x + c$$

Kontrol

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du = x + c$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln|u-1| - \ln|u+1|\right) = x + c$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = x + c \to \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos y - 1}{\cos y + 1}\right| = x + c$$

$\cos y = 1 - 2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)$, $\cos y = 2\cos^2\left(\frac{y}{2}\right) - 1$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-\cancel{2}\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}{\cancel{2}\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)}\right| = x + c$$

$|+|$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\tan^2\left(\frac{y}{2}\right)\right) = x + c$$

$$2 \cdot \frac{1}{2}\ln\tan\left(\frac{y}{2}\right) = x + c$$

$$\ln\tan\left(\frac{y}{2}\right) = x + c \to \boxed{\tan\left(\frac{y}{2}\right) = e^x \cdot \underbrace{e^c}_{c_1} \text{ bulunur.}}$$

e

10

Ö/ $\frac{dy}{dx} + x \cdot \cot y = 0$ ve $y(2)=0$ denk. çözümünü bz.

$\boxed{\underset{x}{f(2)} = \underset{y}{0}}$

$$\frac{dy}{dx} = -x \cdot \frac{1}{\tan y} \rightarrow \int \tan y \, dy = \int -x \cdot dx$$

$$\int \frac{\sin y}{\cos y} dy = \int -x \cdot dx$$

$$-\ln|\cos y| = -\frac{x^2}{2} + c \quad (x=2, \; y=0 \text{ için})$$

$$-\ln|\underbrace{\cos 0}_{1}| = -\frac{2^2}{2} + c$$

$$0 = -2 + c \rightarrow c = 2$$

$$-\ln|\cos y| = -\frac{x^2}{2} + 2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{2} - \ln|\cos y| = 2}$$ bulunur.

Ö/ $\left(y + \frac{1}{y}\right) dx + \left(x - \frac{1}{x}\right) dy = 0$, $y(0) = -1$ denk. çöz. bz.

$$\left(\frac{y^2+1}{y}\right) dx + \left(\frac{x^2-1}{x}\right) dy = 0$$

$$\left(\frac{y^2+1}{y}\right) dx = \left(\frac{1-x^2}{x}\right) dy$$

$$\int \left(\frac{x}{1-x^2}\right) dx = \int \left(\frac{y}{1+y^2}\right) dy$$

$u = 1-x^2$ $\qquad$ $u = 1+y^2$

$du = -2x\,dx$ $\qquad$ $du = 2y\,dy$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x\,dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2y\,dy}{1+y^2}$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1-x^2| = \frac{1}{2}\ln|1+y^2| + \underset{\frac{1}{2}\ln c}{c}$$

$$\frac{-\ln c}{\ln c} = \ln|x^2-1| + \ln|1+y^2|$$

$$(x^2-1)\cdot(y^2+1) = c$$

$$y(0) = -1 \rightarrow (0^2-1)\cdot((-1)^2+1) = c$$

$$c = -2$$

$$\boxed{(x^2-1)\cdot(y^2+1) = -2}$$ bulunur

Homojen Diferansiyel Denklemler

Tanım: $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ şeklindeki birinci mertebeden diferansiyel denklem $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ olacak şekilde $\left(\dfrac{y}{x}\right)$'in bir fonksiyonu olarak ifade edilebiliyorsa bu tip denklemlere "Homojen Diferansiyel Denklemler" denir.

ö/ $(x^2-y^2)\,dx + 3xy\,dy = 0 \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}\right] = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ Homojen

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2-y^2}{3xy} = \dfrac{y^2-x^2}{3xy}$

ö/ $(x^4+y^4)\,dx - xy^3\,dy = 0 \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3}{y^3} + \dfrac{y}{x} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ Homojen

ö/ $\left(y.\arctan\dfrac{y}{x}\right)dx - x\,dy = 0 \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ Homojen

ö/ $\left(\underbrace{\sqrt{x^2-y^2}}_{\sqrt{x^2\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)}}\right)dx + \underbrace{(2x-y)}_{x\left(2-\frac{y}{x}\right)}dy = 0 \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}{2-\frac{y}{x}} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ Homojen

ö/ $x.\tan\left(\dfrac{y}{x}\right)dx + \underbrace{(x-y)}_{x\left(1-\frac{y}{x}\right)}dy = 0 \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\tan\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ Homojen

Homojen Diferansiyel Denklem Çözümü

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ denkleminde $\frac{y}{x} = u$ dönüşümü yapılarak

$$\boxed{f(x \cdot k, y \cdot k) = f(x, y) \text{ ise homojen denklemdir. } \left(\frac{y \cdot k}{x \cdot k} = \frac{y}{x}\right)}$$

$\frac{y}{x} = u \rightarrow y = x \cdot u$ (Çarpımın Türevi)

$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot u + x \cdot \frac{du}{dx}$ dönüşümü kullanılır.

Ö/ $(x^2+y^2)dx - xy\,dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = F\left(\frac{y}{x}\right) \text{ olur.}$$

$$u = \frac{y}{x} \rightarrow y = u \cdot x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \boxed{1 \cdot u + x \cdot \frac{du}{dx}} \text{ olur.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow \cancel{1 \cdot u} + x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} + \cancel{u} \quad \left(\rightarrow \frac{x}{dx} = \frac{1}{u \cdot du} \qquad \frac{dx}{x} = u \cdot du \right)$$

$$\int u \cdot du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{u^2}{2} = \ln|x| + C$$

$$\frac{\left(\frac{y^2}{x^2}\right)}{2} - \ln|x| = C$$

$$\boxed{\frac{y^2}{2x^2} - \ln|x| = C} \text{ bulunur.}$$

8/ $x^2 \frac{dy}{dx} = y^2 + x^2 + xy$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} + \frac{xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right) + 1 = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ olur.}$$

$$\left[u = \frac{y}{x} \rightarrow y = x.u \qquad \frac{dy}{dx} = u + x.\frac{du}{dx} \right]$$

$$\cancel{u} + x.\frac{du}{dx} = u^2 + \cancel{u} + 1 \rightarrow \frac{x}{dx} = \frac{u^2+1}{du}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{1+u^2}$$

$$\ln|x| + c = \arctan u$$

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + c \quad \text{bulunur.}$$

Ö/ $(\overbrace{y.\ln y - y.\ln x}^{y.\ln\left(\frac{y}{x}\right)} + y)\,dx = x\,dy$ dif. denk. çözünüz.

$$\frac{\left(y.\ln\left(\frac{y}{x}\right) + y\right)}{x} dx = \frac{x.\,dy}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.\ln\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\left[u = \frac{y}{x} \rightarrow y = x.u \rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x.\frac{du}{dx} \right]$$

$$\cancel{u} + x.\frac{du}{dx} = u.\ln u + \cancel{u}$$

$$\frac{1}{u\ln u} du = \frac{1}{x} dx \rightarrow \ln(\ln u) = \ln x + \overbrace{\ln c}^{c}$$

$$\left(v = \ln u \rightarrow dv = \frac{1}{u} du \right)$$

$$\ln(\ln u) = \ln(x.c)$$

$$\ln u = x.c$$

$$u = e^{x}.e^{c} \quad c \rightarrow c_1$$

$$\boxed{\frac{y}{x} = e^{x}.c_1 \qquad y = x.e^{x}.c_1}$$

Ö/ $\frac{dy}{dx} = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$, $y(1)=0$ dif. denk. çözünüz.

$$\left[\frac{y}{x} = u \to y = x.u \to \frac{dy}{dx} = u + x.\frac{du}{dx} \right]$$

$$\cancel{u} + x.\frac{du}{dx} = e^{u} + \cancel{u} \to \int \frac{du}{e^{u}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-e^{-u} = \ln|x| + c$$

$$\boxed{\ln|x| + e^{-\frac{y}{x}} = -c} \quad [y(1)=0]$$

$$\underbrace{\ln 1}_{0} + \underbrace{e^{-\frac{0}{1}}}_{1} = -c \to c = -1 \text{ olur.}$$

$$\boxed{\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = 1} \text{ bulunur}$$

Ö/ $(y - \sqrt{x^2-y^2})dx - x dy = 0$, $y(1)=1$ dif. denk. çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x=\sqrt{x^2}} = \frac{y}{x} - \sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\left[u = \frac{y}{x} \to y = x.u \to \frac{dy}{dx} = u + x.\frac{du}{dx} \right]$$

$$\cancel{u} + x.\frac{du}{dx} = \cancel{u} - \sqrt{1-u^2}$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$-\arcsin u = \ln|x| + c$$

$$\ln|x| + \arcsin\frac{y}{x} = c \quad (y(1)=1)$$

$$\ln 1 + \arcsin\left(\frac{1}{1}\right) = c$$

$$0 + \frac{\pi}{2} = c \to c = \frac{\pi}{2} \text{ olur.}$$

$$\boxed{\ln|x| + \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{2}} \text{ bulunur}$$

NOT/ $(2x-3y+4)dx+(3x-y-1)dy=0$ dif denk. homojen hale dönüştürmek için $\left.\begin{array}{l} x=X+h \\ y=Y+k \end{array}\right)$ dönüşümü kullanılır.

$\left[\begin{array}{l} 2x-3y+4 \\ 3x-y-1 \end{array}\right.$ Sabit sayıları yok etmek için $\left.\right]$

$d_1: 2x-3y+4=0$
$d_2: 3x-y-1=0$ doğruları <u>paralel</u> ise homojen hale <u>dönüşmez.</u>

h ve k değerleri bulunurken doğru denk. x ve y yerine yazılarak bulunur. $\left.\begin{array}{l} 2x-3y+4=0 \rightarrow 2\cdot h-3\cdot k+4=0 \\ 3x-y-1=0 \rightarrow 3\cdot h-k-1=0 \end{array}\right\}$ $h=1$, $k=2$ olur.

$x=X+1$
$y=Y+2$ dönüşümü yapıldığında sabit sayılar (4 ve −1) yok olduğundan denklem homojen hale dönüşür.

ö/ $(3x+y-5)dx+(x-4y-6)dy=0$ dif. denk. homojen hale dönüştürmek için hangi dönüşüm kullanılır?

$d_1: 3x+y-5=0$
$d_2: x-4y-6=0$

$d_1 \parallel d_2$ olmadığından $x=X+h$, $y=Y+k$ dönüşümü yapılır.
$m_1=-3$, $m_2=\frac{1}{4}$

$x \rightarrow h$
$y \rightarrow k$ yazılır. $\left.\begin{array}{l} 3\cdot h+k-5=0 \\ h-4k-6=0 \end{array}\right\}$ $k=-1$, $h=2$ olur.

$\boxed{\begin{array}{l} x=X-1 \\ y=Y+2 \end{array}}$ dönüşümü yapılır.

Tam Diferansiyel Denklemler

Tanım: $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ dif. denk. için

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$ eşitliği sağlanıyorsa

bu tür denklemlere "Tam Diferansiyel Denklem" denir.

Ö/ $(y^3 + \sin x)\,dx + (3xy^2)\,dy = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y^3+\sin x}{dy} = 3y^2 \\[2ex] \dfrac{3xy^2}{dx} = 3y^2 \end{array}\right\} \text{Tam Dif. Denk.}$$

Ö/ $(y\sin x + 3\ln x)\,dx + (y^2 - \cos x)\,dy = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y\sin x+3\ln x}{dy} = \sin x \\[2ex] \dfrac{y^2-\cos x}{dx} = \sin x \end{array}\right\} \text{Tam Dif. Denk.}$$

Ö/ $(5x + 16xy)\,dx + (8x^2 - \tan y)\,dy = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{5x+16xy}{dy} = 16x \\[2ex] \dfrac{8x^2-\tan y}{dx} = 16x \end{array}\right\} \text{Tam Dif. Denk.}$$

Tam Diferansiyel Denklemin Çözümü

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ denklemi Tam diferansiyel denklem

ise $\left(\frac{P(x,y)}{dy} = \frac{Q(x,y)}{dx} \right)$

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y) = \int P(x,y)dx + \ell(y) \\ \frac{d}{dy}F(x,y) = Q(x,y) \rightarrow \ell(y) \text{ bulunur.} \end{array}\right\} \begin{array}{l} F(x,y) = c \\ \text{çözümü bulunur.} \end{array}$$

Ö/ $(2x+\cos y)dx + (-x\sin y + y)dy = 0$ dif. denk. çözümünü bz.

$\frac{d}{dy}(2x+\cos y) = \frac{d}{dx}(-x.\sin y + y) = -\sin y$ old. Tam Dif. Denk.

$F(x,y) = \int (2x+\cos y)dx + \ell(y) = \underbrace{x^2 + x.\cos y + \ell(y)}$

$\frac{d}{dy}F(x,y) = Q(x,y) \rightarrow x.(-\sin y) + \ell'(y) = -x.\sin y + y$

$\int \ell'(y) = \int y$

$\ell(y) = \frac{y^2}{2}$

$F(x,y) = x^2 + x.\cos y + \ell(y) = c$

$\boxed{F(x,y) = x^2 + x.\cos y + \frac{y^2}{2} = c}$ bulunur.

ö/ $(x^2+y)\,dx + (x-2y)\,dy = 0$ dif. denk. Göz. bz

$$\frac{d}{dy}\overbrace{(x^2+y)}^{P} = \frac{d}{dx}\overbrace{(x-2y)}^{Q} = 1 \quad \text{Tam dif. denk.}$$

$$F(x,y) = \int (x^2+y)\,dx + l(y) = \frac{x^3}{3} + x.y + l(y)$$

$$\frac{d}{dy}F(x,y) = Q(x,y) \rightarrow \quad x + l'(y) = x - 2y$$

$$\int l'(y) = \int -2y$$

$$l(y) = -y^2$$

$$F(x,y) = \frac{x^3}{3} + x.y + l(y) = \boxed{\frac{x^3}{3} + x.y - y^2 = c}$$

ö/ $(y\cos x + 2x + \frac{1}{x})\,dx + (\sin x + e^y - 2y)\,dy = 0$ dif. denk. Göz. bz.

$$\frac{d}{dy}(y\cos x + 2x + \frac{1}{x}) = \frac{d}{dx}(\sin x + e^y - 2y) = \cos x \quad \text{Tam dif. denk.}$$

$$F(x,y) = \int (y\cos x + 2x + \frac{1}{x})\,dx + l(y) = y.\sin x + x^2 + \ln x + l(y)$$

$$\frac{d}{dy}F(x,y) = Q(x,y) \rightarrow \quad \sin x + l'(y) = \sin x + e^y - 2y$$

$$\int l'(y) = \int (e^y - 2y) \rightarrow l(y) = e^y - y^2$$

$$F(x,y) = y.\sin x + x^2 + \ln x + \underline{l(y)}$$

$$F(x,y) = y.\sin x + x^2 + \ln x + \underline{e^y - y^2} = c$$

ör/ $(x^2+2x\ln y)\,dx + \frac{x^2}{y}\,dy = 0$ dif denk. çöz. bz.

$$\frac{d}{dy}(x^2+2x\ln y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2x}{y}$$ old. Tam dif. denk.

$$F(x,y) = \int (x^2+2x\ln y)\,dx + \ell(y) = \frac{x^3}{3} + x^2\ln y + \ell(y)$$

$$\frac{d}{dy}F(x,y) = Q(x,y) \to \frac{x^2}{y} + \ell'(y) = \frac{x^2}{y} \to \int \ell'(y) = \int 0$$

$$\ell(y) = c$$

$$F(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2\ln y + \ell(y)$$

$$F(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2\ln y + c = c_1 = \boxed{\frac{x^3}{3} + x^2\ln y} = \underbrace{c_1 - c}_{c \text{ olsun}}$$

ör/ $(xe^y + x^2)\,dx + \left(\frac{x^2e^y}{2}\right)dy = 0$ dif denk. çöz. bz.

$$\frac{d}{dy}(xe^y + x^2) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2e^y}{2}\right) = x.e^y$$ old. tam dif. denk.

$$F(x,y) = \int (xe^y + x^2)\,dx + \ell(y) = \frac{x^2}{2}e^y + \frac{x^3}{3} + \ell(y)$$

$$\frac{d}{dy}F(x,y) = Q(x,y) \to \frac{x^2}{2}e^y + \ell'(y) = \frac{x^2e^y}{2} \to \ell(y) = c$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2}e^y + \frac{x^3}{3} + \ell(y)$$ sabit old. yazılmaz

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2}e^y + \frac{x^3}{3} = c$$ bulunur

Lineer Diferansiyel Denklem Çözümleri

Tanım: $\frac{dy}{dx} + P(x)\cdot y = K(x)$ şeklindeki denkleme birinci mertebeden "lineer diferansiyel denklem" denir.

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$ formunda integral çarpanı bulunur.

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)\cdot K(x)\, dx$$ elde edilir.

Ö/ $\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x} y = x^5$ dif. denk. çözümünü bz.

$P(x) = -\frac{3}{x}$ $\quad K(x) = x^5$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\cdot \ln x} = e^{\ln_e x^{-3}} = x^{-3}$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)\cdot K(x)\cdot dx = \frac{1}{x^{-3}} \int x^{-3}\cdot x^5 \cdot dx = x^3 \cdot \int x^2 dx$$

$$= x^3 \cdot \left(\frac{x^3}{3} + c\right)$$

Ö/ $dy - 3x^2(y + e^{x^3})dx = 0$ dif. denk. çöz. bz.

$$\frac{dy}{dx} \underbrace{-3x^2}_{P(x)} \cdot y = \underbrace{3x^2 e^{x^3}}_{K(x)} \qquad \mu(x) = e^{\int -3x^2 dx} = e^{-x^3}$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)\cdot k(x) dx = \frac{1}{e^{-x^3}} \int e^{-x^3} \cdot 3x^2 \cdot e^{x^3} dx = e^{x^3} \cdot \int 3x^2 dx$$

$$= e^{x^3} \cdot (x^3 + c)$$ bulunur.

Ö/ $x\frac{dy}{dx}+y=x^3$ dif. denk. çöz. bz.

$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=x^2 \rightarrow P(x)=\frac{1}{x}$, $K(x)=x^2$

$\mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$

$y=\frac{1}{\mu(x)}\int\mu(x)K(x)\,dx=\frac{1}{x}\int x\cdot x^2\,dx=\frac{1}{x}\int x^3\,dx$

$=\frac{1}{x}\left(\frac{x^4}{4}+c\right)$

Ö/ $x^3\cdot y'+2x^2\cdot y=5$ dif. denk. çöz. bz.

$y'+\frac{2y}{x}=\frac{5}{x^3} \rightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}\cdot y=\frac{5}{x^3}$, $P(x)=\frac{2}{x}$, $K(x)=\frac{5}{x^3}$

$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2$

$y=\frac{1}{\mu(x)}\int\mu(x)\cdot K(x)\,dx=\frac{1}{x^2}\int x^2\cdot\frac{5}{x^3}\,dx=\frac{1}{x^2}\int\frac{5}{x}\,dx$

$y=\frac{1}{x^2}\left(5\ln|x|+c\right)$ bulunur.

ö/ $y' \cdot \tan x + y = \sec x$

$\frac{\cos x}{\sin x} / \; y' \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + y = \frac{1}{\cos x} \rightarrow y' + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot y = \frac{1}{\sin x}$

$P(x) = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad K(x) = \frac{1}{\sin x}$

$$M(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int \frac{\cos x}{\sin x} dx} = e^{\ln \sin x} = \sin x$$

$$y = \frac{1}{M(x)} \int M(x) \cdot K(x)\,dx = \frac{1}{\sin x} \int \sin x \cdot \frac{1}{\sin x}\,dx = \frac{1}{\sin x} \int 1 \cdot dx$$

$$y = \frac{1}{\sin x} \cdot (x + c)$$

ö/ $\frac{dx}{dy} - x \cdot \tan y = \sec y$ ($\frac{dx}{dy}$ <u>dikkat!!!</u>)

$P(y) = -\tan y, \quad K(y) = \sec y = \frac{1}{\cos y}$

$$M(y) = e^{\int P(y)\,dy} = e^{\int -\tan y\,dy} = e^{\int \frac{-\sin y}{\cos y} dy} = e^{\ln_e \cos y} = \cos y$$

$$x = \frac{1}{M(y)} \int M(y) \cdot K(y)\,dy = \frac{1}{\cos y} \int \cancel{\cos y} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos y}}\,dy$$

$$\boxed{x = \frac{1}{\cos y}(y + c)}$$ bulunur.

Ö/ $y \cdot \dfrac{dx}{dy} + 3x = 7y^4$, $y(1)=1$ dif. denk. çöz. bz.

$$\frac{dx}{dy} + \frac{3x}{y} = 7y^3, \quad P(y) = \frac{3}{y} \quad K(y) = 7y^3$$

$\left(\dfrac{dx}{dy} \text{ dikkat !!!}\right)$

$$\mu(y) = e^{\int P(y)dy} = e^{\int \frac{3}{y}dy} = e^{3\ln y} = e^{\ln y^3} = y^3$$

$$x = \frac{1}{\mu(y)} \int \mu(y) \cdot K(y)\, dy = \frac{1}{y^3} \int y^3 \cdot 7 y^3\, dy = \frac{1}{y^3} \int 7 y^6\, dy$$

$$x = \frac{1}{y^3}(y^7 + c) \rightarrow x y^3 = y^7 + c$$

$$y(1) = 1 \rightarrow 1 \cdot 1^3 = 1^7 + c$$

$c = 0$ olur.

$x = \dfrac{1}{y^3}(y^7) \rightarrow$ $\boxed{x = y^4 \text{ bulunur.}}$

Ö/ $y' - y \cdot \sin x = \sin x$, $y(0) = 0$ dif. denk. çöz. bz.

$$P(x) = -\sin x, \quad K(x) = \sin x$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int -\sin x\,dx} = e^{\cos x}$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) \cdot K(x)\, dx = \frac{1}{e^{\cos x}} \int e^{\cos x} \cdot \sin x\, dx$$

$u = \cos x$

$du = -\sin x\, dx$

$$\int e^u(-du) = -e^u = -e^{\cos x}$$

$$y = \frac{1}{e^{\cos x}}\left(-e^{\cos x} + c\right), \quad y(0) = 0$$

$$0 = \frac{1}{e^{\cos 0}}\left(-e^{\cos 0} + c\right) \rightarrow c = e$$

olur.

$y = \dfrac{1}{e^{\cos x}}\left(-e^{\cos x} + e\right)$ bulunur.

Bernoulli Diferensiyel Denklemleri

Tanım: $y' + P(x)\cdot y = K(x)\cdot y^n$ yapısındaki diferensiyel denklemlere "Bernoulli Diferensiyel Denklem" denir.

$u = y^{1-n}$ dönüşümü ile denklem "Lineer Diferensiyel Denkleme" dönüştürülür. $(n \in \mathbb{R})$ Lineer diferensiyel denklem çözümü uygulanır.

Ö/ $y' + y = x\cdot y^2$ dif. denk. çöz. bz.

$P(x) = 1$, $K(x) = x$, $n = 2$

$$\left[\begin{array}{l} u = y^{1-2} = y^{-1} \\ u' = -\underbrace{y^{-2}}_{\text{ile genişletilir.}}\cdot y' \text{ olur.} \end{array}\right]$$

$$-y^{-2} / \quad y' + y = x\cdot y^2$$

$$\underbrace{-y^{-2}\cdot y'}_{} - \underbrace{y^{-1}}_{} = -x$$

$$u' - \underset{\downarrow}{1}\, u = -x$$

$$P(x) = -1 \,, \quad K(x) = -x$$

$$M(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -1\cdot dx} = e^{-x}$$

$$u = \frac{1}{\mu(x)} \int M(x)\cdot K(x)\, dx = \frac{1}{e^{-x}} \underbrace{\int e^{-x}\cdot(-x)\, dx}_{\text{Kısmi integralden}}$$

$$= xe^{-x} + e^{-x} + c$$

$$u = \frac{1}{e^{-x}}(x\cdot e^{-x} + e^{-x} + c)$$

$$\frac{1}{y} = e^{x}(x\cdot e^{-x} + e^{-x} + c)$$

$$\boxed{\frac{1}{y} = x + 1 + c\cdot e^{x}} \text{ bulunur.}$$

ö/ $y'+y=2y^3$ dif denk. çöz. bz.

$P(x)=1,\ K(x)=2,\ n=3$

$$\left[\begin{array}{l} u=y^{1-3}=y^{-2} \\ u'=\underbrace{-2\cdot y^{-3}\cdot}_{\text{ile genişletilin}} y' \end{array}\right] \qquad -2\cdot y^{-3}/\ y'+y=2\cdot y^3$$

$$\underbrace{-2\cdot y^{-3}\cdot y'}_{\downarrow} - 2\cdot \underbrace{y^{-2}}_{\downarrow} = -4$$

$$u'-2\cdot u=-4$$

$$P(x)=-2,\ K(x)=-4$$

$$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}=e^{\int -2dx}=e^{-2x}$$

$$u=\frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)\cdot K(x)dx=\frac{1}{e^{-2x}}\underbrace{\int e^{-2x}\cdot(-4)\,dx}$$

$$e^{2x}\left(2\cdot e^{-2x}+c\right)$$

$$u=e^{2x}\cdot\left(2\cdot e^{-2x}+c\right)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{y^2}=2+e^{2x}\cdot c \quad \text{bulunur}}$$

ö/ $y'-\frac{2}{x}y=\frac{y^4}{x}$ Bernoulli dif. denk. hangi Lineer denkleme indirgenir?

$P(x)=-\frac{2}{x},\ K(x)=\frac{1}{x},\ n=4$

$$\left[\begin{array}{l} u=y^{1-4}=y^{-3} \\ u'=\underbrace{-3\cdot y^{-4}\cdot}_{\text{ile genişletilin}} y' \end{array}\right] \qquad -3y^{-4}/\ y'-\frac{2}{x}y=\frac{y^4}{x}$$

$$\underbrace{-3y^{-4}\cdot y'}+\frac{6}{x}\underbrace{y^{-3}}=-\frac{3}{x}$$

$$\boxed{u'+\frac{6}{x}\cdot u=-\frac{3}{x} \quad \text{lineer denklem}}$$

Ö/ $y' + 2y = xy^2$ Bernoulli diferansiyel denklemini Lineer denklemine indirgeyiniz.

$P(x) = 2, \quad K(x) = x, \quad n = 2$

$u = y^{1-2} = y^{-1}$

$u' = \underbrace{-y^{-2}}\cdot y'$

ile genişletilir

$-y^{-2} / \quad y' + 2y = x \cdot y^2$

$\underbrace{-y^{-2} \cdot y'} - 2 \cdot \underbrace{y^{-1}} = -x$

$\boxed{u' - 2 \cdot u = -x}$ Lineer Denklemi

Ö/ $y' + 3xy = \frac{x}{y^2}$ Bernoulli diferansiyel denklemini Lineer denklemine indirgeyiniz.

$P(x) = 3x, \quad K(x) = x, \quad n = -2$

$u = y^{1-(-2)} = y^3$

$u' = \underbrace{3 \cdot y^2} \cdot y'$

ile genişletilir

$3y^2 / \quad y' + 3xy = \frac{x}{y^2}$

$\underbrace{3y^2 \cdot y'} + 9x\underbrace{y^3} = 3x$

$\boxed{u' + 9x \cdot u = 3x}$ Lineer Denklemi

Ö/ $y' + 4xy = \sqrt{y}$ Bernoulli dif. denk. hangi lineer denk. indirgenir?

$P(x) = 4x, \quad K(x) = 1, \quad n = \frac{1}{2}$

$u = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$

$u' = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot y^{-\frac{1}{2}}} \cdot y'$

ile genişletilir

$\frac{1}{2}y^{-1/2} / \quad y' + 4xy = \sqrt{y}$

$\underbrace{\frac{1}{2}y^{-1/2} \cdot y'} + 2x \cdot \underbrace{y^{1/2}} = \frac{1}{2}$

$\boxed{u' + 2x \cdot u = \frac{1}{2}}$ lineer denklemi

Ö/ $y = x \cdot y' - \dfrac{1}{(y')^2}$ dif. denklemini çözünüz.

$\dfrac{dy}{dx} = y' = P$ olsun. $y = x \cdot P - \dfrac{1}{P^2}$ $\quad P^{-2}$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot P + x \cdot \frac{dP}{dx} + 2 \cdot P^{-3} \cdot \frac{dP}{dx}$$

$$\cancel{P} = \cancel{P} + x \cdot \frac{dP}{dx} + \frac{2}{P^3} \cdot \frac{dP}{dx}$$

$$0 = \frac{dP}{dx}\left(x + \frac{2}{P^3}\right)$$

$\dfrac{dP}{dx} = 0$

$\boxed{P = C \in R}$

$y' = P = C$

$y = x \cdot y' - \dfrac{1}{(y')^2}$

$y = x \cdot C - \dfrac{1}{C^2}$

$\boxed{y = \dfrac{x \cdot C^3 - 1}{C^2} \text{ bulunur.}}$

$x + \dfrac{2}{P^3} = 0 \rightarrow x = -\dfrac{2}{P^3}$

$\boxed{P^3 = -\dfrac{2}{x}}$

$y = x \cdot P - \dfrac{1}{P^2}$

$y = \dfrac{x \cdot P^3 - 1}{P^2} = \dfrac{x \cdot \left(-\frac{2}{x}\right) - 1}{P^2}$

$y = \dfrac{-3}{P^2} \rightarrow y^3 = \dfrac{-27}{(P^3)^2}$

$y^3 = \dfrac{-27}{\left(-\frac{2}{x}\right)^2}$

$\boxed{y^3 = \dfrac{-27x^2}{4} \text{ bulunur.}}$

$\boxed{4y^3 + 27x^2 = 0 \text{ bulunur}}$

NOT/ Riccati Dif. Denklemi:

$y' = P(x) \cdot y^2 + q(x) \cdot y + r(x)$

$y = y_1 + \dfrac{1}{t} \rightarrow y' = y_1' - \dfrac{1}{t^2} \cdot t'$ yerine yazılır.

$t' + [2 \cdot P(x) \cdot y_1 + q(x)] \cdot t = -P(x)$ lineer denklemine döner.

Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Homojen Denklemler

Tanım: $a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (a_i \in R)$

n. mertebeden sabit katsayılı homojen denklemin çözümü

$y = e^{mx} \ (m \in R)$ formundadır.

$y = e^{mx}$ ifadesini denklemde yerine yazınca oluşan denkleme

"Karakteristik Denklem" denir.

$e^{mx} \cdot (a_n \cdot m^n + a_{n-1} \cdot m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0) = 0$ ile gösterilir.

Karakteristik denklemin köklerine bağlı olarak 3 durum vardır.

$\Delta > 0$ ise $m_1 \neq m_2 \rightarrow$ Denklemin Çözümü: $y = \overbrace{c_1 \cdot e^{m_1 x}}^{y_1} + \overbrace{C_2 \cdot e^{m_2 x}}^{y_2}$

$y_1 = e^{m_1 \cdot x}, \ y_2 = e^{m_2 \cdot x}$

$\Delta = 0$ ise $m_1 = m_2 \rightarrow$ Denklemin Çözümü: $y = \overbrace{c_1 \cdot e^{m_1 x}}^{y_1} + \overbrace{c_2 \cdot x \cdot e^{m_1 x}}^{y_2}$

$y_1 = e^{m_1 \cdot x}, \ y_2 = x \cdot e^{m_1 \cdot x}$

$\Delta < 0$ ise $m_{1,2} = a \mp bi \rightarrow$ Denklemin Çözümü: $y = \overbrace{c_1 \cdot e^{ax} \cdot \cos bx}^{y_1} + \overbrace{c_2 \cdot e^{ax} \cdot \sin bx}^{y_2}$

$y_1 = e^{ax} \cdot \cos bx$

$y_2 = e^{ax} \cdot \sin bx$

$\Delta > 0$ için

ö/ $y'' - 7y' + 12y = 0$ dif. denk. çöz. bz.

$m^2 - 7m + 12 = 0$ $\quad (-4, -3)$ $\quad m_1 = 3, \; m_2 = 4$

$$y = \overbrace{c_1 \cdot e^{3x}}^{y_1} + \overbrace{c_2 \cdot e^{4x}}^{y_2}$$

ö/ $y'' - 2y' = 0$ dif. denk. çöz. bz.

$m^2 - 2m = 0$

$m(m-2) = 0$ $\quad m_1 = 0, \; m_2 = 2$

$$y = \overbrace{c_1 \cdot e^{0 \cdot x}}^{y_1} + \overbrace{c_2 \cdot e^{2 \cdot x}}^{y_2}$$

$$y = c_1 + c_2 \cdot e^{2x}$$

ö/ $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 6 \cdot \dfrac{d^2y}{dx^2} + 11 \cdot \dfrac{dy}{dx} - 6y = 0$ dif. denk. çöz. bz.

$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0$

$m_1 = 1 \rightarrow 1 - 6 + 11 - 6 = 0$

$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 \; \big| \; m - 1$

$\qquad m^2 - 5m + 6 \quad (-3, -2)$

$m_2 = 2$

$m_3 = 3$

$$y = \overbrace{c_1 \cdot e^{1 \cdot x}}^{y_1} + \overbrace{c_2 \cdot e^{2 \cdot x}}^{y_2} + \overbrace{c_3 \cdot e^{3 \cdot x}}^{y_3}$$

ö/ $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 7 \cdot \dfrac{dy}{dx} - 6y = 0$ dif. denk. çöz. bz.

$m^3 - 7m - 6 = 0$

$m_1 = -1$, $\quad m^3 - 7m - 6 \; \big| \; m + 1$

$\qquad m^2 - m - 6 = 0 \quad (-3, +2)$

$m_2 = -2$

$m_3 = 3$

$$y = \overbrace{c_1 \cdot e^{-x}}^{y_1} + \overbrace{c_2 \cdot e^{-2x}}^{y_2} + \overbrace{c_3 \cdot e^{3x}}^{y_3}$$

Ö/ $y'' + 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -7$ dif. denk. çöz. bz.

$m^2 + 3m - 4 = 0$ ($+4$, -1) $\quad m = 1$, $m = -4$

$$y = \underbrace{c_1 \cdot e^{x}}_{y_1} + \underbrace{c_2 \cdot e^{-4x}}_{y_2}$$

$y(0) = 3 \rightarrow c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^{-4 \cdot 0} = 3 \rightarrow \boxed{c_1 + c_2 = 3}$

$y' = c_1 \cdot e^{x} - 4 \cdot c_2 \cdot e^{-4x}$

$y'(0) = -7 \rightarrow c_1 \cdot e^0 - 4 \cdot c_2 \cdot e^{-4 \cdot 0} = -7 \rightarrow \boxed{c_1 - 4c_2 = -7}$

$c_1 = 1$, $c_2 = 2$

$\boxed{y = 1 \cdot e^{x} + 2 \cdot e^{-4x} \text{ bulunur.}}$

Ö/ $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$ dif. denk. çöz. bz.

$m^2 - 3m + 2 = 0$ (-1, -2) $\quad m_1 = 1$, $m_2 = 2$

$$y = \underbrace{c_1 \cdot e^{x}}_{y_1} + \underbrace{c_2 \cdot e^{2x}}_{y_2}$$

$y' = c_1 \cdot e^{x} + 2 \cdot c_2 \cdot e^{2x}$

$y(0) = 5 \rightarrow c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^{2 \cdot 0} = 5 \rightarrow c_1 + c_2 = 5$

$y'(0) = 8 \rightarrow c_1 \cdot e^0 + 2 \cdot c_2 \cdot e^{2 \cdot 0} = 8 \rightarrow c_1 + 2c_2 = 8$

$c_1 = 2$, $c_2 = 3$

$\boxed{y = 2 \cdot e^{x} + 3 \cdot e^{2x} \text{ bulunur.}}$

$\Delta = 0$ için

ö/ $y'' - 8y' + 16y = 0$ dif. denk. çöz. bz.

$$m^2 - 8m + 16 = 0, \quad m_1 = m_2 = 4 \qquad y = \overbrace{c_1 \cdot e^{4x}}^{y_1} + \overbrace{c_2 \cdot x \cdot e^{4x}}^{y_2}$$

$$-4 \quad -4$$

$$(m-4)^2$$

ö/ $y'' + 10y' + 25y = 0$ dif. denk. çöz. bz.

$$m^2 + 10m + 25 = 0, \quad m_1 = m_2 = -5 \qquad y = \overbrace{c_1 \cdot e^{-5x}}^{y_1} + \overbrace{c_2 \cdot x \cdot e^{-5x}}^{y_2}$$

$$5, 5$$

$$(m+5)^2$$

ö/ $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ dif. denk. çöz. bz.

$$m^4 - 2m^2 + 1 = 0$$

$$(m^2 - 1)^2 = 0$$

$$m^2 = 1 \rightarrow m_{1,2} = 1, \quad m_{3,4} = -1$$

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = x \cdot e^x, \quad y_3 = e^{-x}, \quad y_4 = x \cdot e^{-x}$$

$$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x + c_3 \cdot e^{-x} + c_4 \cdot x \cdot e^{-x}$$

ö/ $y^{(4)} - 8 \cdot y'' + 16y = 0$ dif. denk. çöz. bz.

$$m^4 - 8m^2 + 16 = 0$$

$$(m^2 - 4)^2 = 0$$

$$m^2 = 4 \rightarrow m_{1,2} = 2, \quad m_{3,4} = -2$$

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = x \cdot e^{2x}, \quad y_3 = e^{-2x}, \quad y_4 = x \cdot e^{-2x}$$

$$y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^{-2x} + c_4 \cdot x \cdot e^{-2x}$$

$\Delta < 0$ için

ö/ $y'' + 4y' + 13y = 0$ dif. denk. çöz. bz.

$m^2 + 4m + 13 = 0$

$\underbrace{m^2 + 4m + 4} + 9 = 0$

$(m+2)^2 = -9$

$m_{1,2} = -2 \mp 3i$

$y_1 = e^{-2x} \cdot \cos 3x$

$y_2 = e^{-2x} \cdot \sin 3x$

$y = c_1 \cdot e^{-2x} \cdot \cos 3x + c_2 \cdot e^{-2x} \cdot \sin 3x$

ö/ $y'' + 9y = 0$ dif. denk. çöz bz.

$m^2 + 9 = 0 \rightarrow m_{1,2} = \mp 3i$

$y_1 = e^{0.x} \cdot \cos 3x = \cos 3x$

$y_2 = e^{0.x} \cdot \sin 3x = \sin 3x$

$y = c_1 \cdot \cos 3x + c_2 \cdot \sin 3x$

ö/ $\frac{d^4y}{dx^4} - y = 0$ dif denk çöz bz.

$m^4 - 1 = 0 \rightarrow (m^2-1)(m^2+1) = 0$

$m_1 = 1$, $m_2 = -1$ $m_{3,4} = \mp i$

$y_1 = e^x$

$y_2 = e^{-x}$

$y_3 = e^{0.x} \cdot \cos x = \cos x$

$y_4 = e^{0x} \cdot \sin x = \sin x$

$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} + c_3 \cdot \cos x + c_4 \cdot \sin x$

ö/ $y'' + 6y' + 13y = 0$

$m^2 + 6m + 13 = 0$

$m_{1,2} = -3 \mp 2i$

$y_1 = e^{-3x} \cdot \cos 2x$

$y_2 = e^{-3x} \cdot \sin 2x$

ö/ $y'' + 4y = 0$

$m^2 + 4 = 0$

$m_{1,2} = \mp 2i$

$y_1 = e^{0x} \cdot \cos 2x$

$y_2 = e^{0x} \cdot \sin 2x$

ö/ $\frac{d^4y}{dx^4} - 16y = 0$

$m^4 - 16 = 0 \rightarrow (m^2-4)(m^2+4) = 0$

$m_1 = 2, m_2 = -2, \quad m_{3,4} = \mp 2i$

$y_1 = e^{2x}$

$y_2 = e^{-2x}$

$y_3 = e^{0.x} \cdot \cos 2x$

$y_4 = e^{0.x} \cdot \sin 2x$

Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Homojen Olmayan Diferansiyel Denklemler

Tanım: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = F(x)$ ve $F(x) \neq 0$ durumundaki denk. n. mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklem denir.

$y = y_{homojen} + y_{özel}$ çözümü uygulanır.

$y_{özel}$ çözümü $F(x)$'in durumuna göre değişiklik gösterir.

Ö/ $y'' - 2y' - 3y = 6x + 2$ dif. denk. çöz. bz.

Homojen çözüm

$y'' - 2y' - 3y = 0$

$m^2 - 2m - 3 = 0$

$-3 \quad +1$

$m_1 = -1$

$m_2 = 3$

$y_h = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{3x}$

Özel çözüm

$y'' - 2y' - 3y = \underbrace{6x+2}_{\text{old.}} \rightarrow y_ö = Ax + B$

$y_ö' = A$

$y_ö'' = 0$

$0 - 2 \cdot A - 3 \cdot (Ax + B) = 6x + 2$

$\underbrace{-3A}_{6} x \underbrace{- 3B - 2A}_{2} = 6x + 2 \rightarrow A = -2$

$B = \frac{2}{3}$

$y_ö = Ax + B = -2x + \frac{2}{3}$

$y = y_h + y_ö = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{3x} - 2x + \frac{2}{3}$ bulunur.

Ö/ $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 5$ dif. denk. çöz. bz

Homojen Denklem

$y'' - 3y' + 2y = 0$

$m^2 - 3m + 2 = 0$

$-2 \quad -1$

$m_1 = 1, \quad m_2 = 2$

$y_h = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}$

Özel Çözüm

$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 5$

$y_ö = Ax^2 + Bx + C$

$y_ö' = 2Ax + B$

$y_ö'' = 2A$

$2A - 3 \cdot (2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + c) = 2x^2 + 5$

$A = 1, \quad B = 3, \quad C = 6$

$y_ö = x^2 + 3x + 6$

$y = y_h + y_ö = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} + x^2 + 3x + 6$ bulunur.

Ö/ $y'' - 8y' + 15y = 15x^2 - x$ dif denk. özel çözümünü ($y_ö$) bz.

$y_ö = Ax^2 + Bx + C$

$y_ö' = 2Ax + B$

$y_ö'' = 2A$

$2A - 8 \cdot (2Ax + B) + 15 \cdot (Ax^2 + Bx + c) = 15x^2 - x$

$A = 1, \quad B = 1, \quad C = \frac{2}{5}$

$y_ö = x^2 + x + \frac{2}{5}$ bulunur.

ö/ $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4y = 4e^x$, $y_ö = ?$

$$y_ö = A \cdot e^x$$
$$y'_ö = A \cdot e^x$$
$$y''_ö = A \cdot e^x$$

$$A \cdot e^x - 4 \cdot A \cdot e^x = 4 \cdot e^x$$
$$-3A \cdot e^x = 4 \cdot e^x$$
$$A = -\frac{4}{3}$$
$$\boxed{y_ö = A \cdot e^x = -\frac{4}{3} \cdot e^x}$$

ö/ $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 9y = 7 \cdot e^{2x}$, $y_ö = ?$

$$y_ö = A \cdot e^{2x}$$
$$y'_ö = 2A \cdot e^{2x}$$
$$y''_ö = 4A \cdot e^{2x}$$

$$4 \cdot A \cdot e^{2x} - 9(A \cdot e^{2x}) = 7 \cdot e^{2x}$$
$$-5A \cdot e^{2x} = 7 \cdot e^{2x} \rightarrow A = -\frac{7}{5}$$
$$\boxed{y_ö = A \cdot e^{2x} = -\frac{7}{5} \cdot e^{2x}}$$

ö/ $y'' - y = 2\cos x$, $y_ö = ?$

$$y_ö = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x$$
$$y'_ö = -A\sin x + B \cdot \cos x$$
$$y''_ö = -A\cos x - B\sin x$$

$$(-A\cos x - B\sin x) - (A\cos x + B\sin x) = 2\cos x$$
$$\underbrace{-2A}_{2}\cos x \underbrace{- 2B}_{0}\sin x = 2\cos x$$
$$A = -1, \quad B = 0$$
$$y_ö = \underset{(-1)}{A}\cos x + \underset{(0)}{B}\sin x$$
$$\boxed{y_ö = -\cos x}$$

ö/ $y'' + 4y = 3\sin x$, $y_ö = ?$

$$y_ö = A\cos x + B\sin x$$
$$y'_ö = -A\sin x + B\cos x$$
$$y''_ö = -A\cos x - B\sin x$$

$$(-A\cos x - B\sin x) + 4(A\cos x + B\sin x) = 3\sin x$$
$$\underbrace{3A}_{0}\cos x + \underbrace{3B}_{3}\sin x = 3\sin x$$
$$A = 0, \quad B = 1$$
$$y_ö = \underset{(0)}{A}\cos x + \underset{(1)}{B}\sin x$$
$$\boxed{y_ö = \sin x}$$

Cauchy – Euler Denklemi

Tanım = $a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x \cdot y' + a_0 y = 0$, $\left(\begin{array}{l} a_i \in \mathbb{R} \\ 1 \le i \le n \end{array} \right)$

denklemine n. mertebeden homojen "Cauchy-Euler denklemi" denir.

Denklemin çözümü, $y = x^N$ formundan bulunan N_1, N_2 ile oluşturulur.

$y = c_1 \cdot x^{N_1} + c_2 \cdot x^{N_2}$ bulunur.

Ö/ $x^2 y'' - 5xy' + 8y = 0$ denk. çöz. bz.

$y = x^N$

$y' = N \cdot x^{N-1}$

$y'' = N \cdot (N-1) \cdot x^{N-2}$

NOT

$y'' \to N \cdot (N-1)$

$y' \to N$

$y \to 1$

x'li ifadeler sadeleşir.

$x^2 \cdot (N \cdot (N-1) \cdot x^{N-2}) - 5 \cdot x \cdot N \cdot x^{N-1} + 8 \cdot x^N = 0$

$(N^2 - 6N + 8) \cdot x^N = 0$

$(N-2)(N-4) = 0 \to N_1 = 2,\ N_2 = 4$, $y = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x^4$

Ö/ $x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0$ denk. çöz bz

$y = x^N$

$y' = N \cdot x^{N-1}$

$y'' = N \cdot (N-1) \cdot x^{N-2}$

– – – –

$(N+4)(N-1) \cdot x^N = 0$

$N = -4 \quad N = 1$

$y = c_1 \cdot x^{-4} + c_2 \cdot x^1$

Ö/ $x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} - 12y = 0$

$N \cdot (N-1) - 12 \cdot 1 = 0$

$N^2 - N - 12 = 0$

$-4 \quad +3$

$N = 4,\ N = -3$

$y = c_1 \cdot x^{-3} + c_2 \cdot x^4$

Ö/ $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 20y = 0$ denk. çöz bz.

$$N.(N-1) - 20.1 = 0$$

$$N^2 - N - 20 = 0$$

$$-5 \; , \; +4$$

$$N = 5, \quad N = -4$$

$$y = c_1 . x^{-4} + c_2 . x^5$$

Ö/ $x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$ denk. çöz. bz.

$$N.(N-1) + 4.N - 4.1 = 0$$

$$N^2 - N + 4N - 4 = 0$$

$$N^2 + 3N - 4 = 0 \qquad N = 1$$

$$+4 \; , \; -1 \qquad N = -4$$

$$y = c_1 . x^{-4} + c_2 . x^1$$

Eğri Aileleri ve Yörüngeler

Verilen fonksiyon denkleminde "c" keyfi sabitlerinin elenmesiyle elde edilen diferansiyel denklemlerdir.

Ö/ $x^2 - y^2 = c$ $(c \in \mathbb{R})$ eğrisinin ilkeli olan diferansiyel denklemi bz.

$$x^2 - y^2 = c \longrightarrow 2x - 2.y.y' = 0 \rightarrow x - y.y' = 0 \rightarrow y' = \frac{x}{y}$$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$ bulunur

Ö/ $x^2 + 2xy = c$ $(c \in \mathbb{R})$ eğrisinin ilkeli olan dif. denk. bz.

$$x^2 + 2xy = c \rightarrow 2x + 2y.1 + 2x.y' = 0$$

$$x + y + x.y' = 0$$

$$y' = -\frac{x+y}{x} = -1 - \frac{y}{x}$$

$\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = -1$ bulunur.

Ö/ $y=c\cdot e^{x}+x$ fonksiyonunu çözüm kabul eden dif. denk. bz. $(c\in\mathbb{R})$

$y'=c\cdot e^{x}+1 \rightarrow \underbrace{c\cdot e^{x}}=y'-1$

$y=\underbrace{c\cdot e^{x}}+x \rightarrow y=\underbrace{y'-1}+x \rightarrow \underline{y'-y=1-x}$ bulunur.

Ö/ $y=c\cdot e^{-x}+\cos x$ fonksiyonunu çözüm kabul eden dif. denk bz. $(c\in\mathbb{R})$

$$
\begin{array}{rl}
 & y'=-c\cdot e^{-x}-\sin x \\
+ & y=c\cdot e^{-x}+\cos x \\
\hline
 & y'+y=\cos x-\sin x
\end{array}
$$

bulunur.

Ö/ $y=A.\sin(3x+B)$ fonksiyonunun ilkeli olan dif. denk. bz.

$y'=3.A.\cos(3x+B)$

$y''=-9.\underbrace{A.\sin(3x+B)}_{y} \rightarrow y''=-9y \rightarrow y''+9y=0$ bulunur

Ö/ $y=A.\cos(2x+B)$ fonk. ilkeli olan dif. denk. bz

$y'=-2A.\sin(2x+B)$

$y''=-4\underbrace{A.\cos(2x+B)}_{y} \rightarrow y''=-4y \rightarrow y''+4y=0$ bulunur ö/ Merkezi orijin olan çemberler ailesinin dik yörüngeleri hangi formdadır?

$x^2+y^2=r^2 \rightarrow 2x+2\cdot y\cdot y'=0 \rightarrow x+y\cdot y'=0 \rightarrow y'=-\frac{x}{y}$

$y'=-\frac{x}{y}$ denklemine dik olan dif. denklem $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$

$\left(\left(-\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{y}{x}\right)=-1 \text{ olmalı}\right)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \rightarrow \int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{x}dx \rightarrow \ln y=\ln x+\underset{\ln c}{\overset{\frown}{c}}$

$\boxed{y=x\cdot c}$ bulunur.

ö/ Tepe noktası orijin olan parabollere dik olan eğri ailesi hangi sınıftandır?

NOT Elips $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2\right)$, Hiperbol $\left(x^2-y^2=r^2\right)$ Çember $\left(x^2+y^2=r^2\right)$

Doğru $(ax+by=c)$, Parabol $(y=ax^2+bx+c)$

$y=cx^2 \rightarrow y'=2cx \rightarrow \frac{dy}{dx}=2\cdot\frac{y}{x^2}\cdot x \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$

$c=\frac{y}{x^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$ denklemine dik olan dif. denklem $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2y}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{2y} \rightarrow \int 2y\,dy=\int -x\,dx$

$y^2=-\frac{x^2}{2}+c$

$\boxed{y^2+\frac{x^2}{2}=c \text{ old. Elips.}}$

Diferensiyel Denklemin Günlük Hayata Uygulanması

* Değişim hızı: $\frac{dy}{dx} = \boxed{p} \cdot y$

Başlangıç değeri: B

İstenen süre: n

$$y(n) = B \cdot e^{p \cdot n}$$

Ö/ Bir bakteri popülasyonundaki nüfus değişim hızı $\frac{dy}{dx} = 0{,}01 \cdot y$ şeklinde verilmektedir. x değişkeni dakika olarak zamanı belirtmektedir. Başlangıçta nüfus 200 ise 100 dakika sonra kaç olur?

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}01 \cdot y \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int (0{,}01)\, dx \rightarrow \ln y = (0{,}01) \cdot x \rightarrow (e^c)$$

$$y = e^{(0{,}01) \cdot x} \cdot c$$

$$y(x) = e^{(0{,}01) \cdot x} \cdot c \rightarrow y(0) = 200 \rightarrow 200 = e^{(0{,}01) \cdot 0} \cdot c \rightarrow c = 200$$

$$y(x) = e^{(0{,}01) \cdot x} \cdot 200 \rightarrow y(100) = e^{(0{,}01) \cdot 100} \cdot 200 = 200 \cdot e \text{ bulunur}$$

Ö/ Akciğer kanseri bir kişinin vücudundaki kanserli hücrelerin sayısının değişim hızı $\frac{dy}{dx} = 0{,}2 \cdot y$ ile verilmektedir. x değişkeni saat olarak zamanı göstermek üzere, başlangıçta kanserli hücre sayısı 1000 ise, 5 saat sonra kaç olur?

$$y(n) = B \cdot e^{p \cdot n} \rightarrow y(5) = 1000 \cdot e^{(0{,}2) \cdot 5}$$

$n = 5$, $B = 1000$, $P = (0{,}2)$

$y(5) = 1000 \cdot e$ bulunur.

$\Rightarrow$ Arkada

Ö/ Bir ülkedeki nüfusun artış hızı mevcut nüfustaki insan sayısıyla orantılıdır. Nüfustaki insan sayısı 16 yılda 2'ye katlandığına göre, kaç yıl sonra insan sayısı 8'e katlanır.

$$y = B \cdot e^{p.n} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2B = B \cdot e^{p.16} \\ 8B = B \cdot e^{p.n} \end{array}\right\} n = ?$$

$$2 = e^{p.16} \rightarrow 2^3 = e^{p.16.3}$$

$$8 = e^{p.n}$$

$n = 48$

Ö/ Bir bakteri kültüründeki bakteri sayısındaki artış hızı bakteri sayısı ile mevcut durumda orantılı şekilde artmaktadır. Kültürdeki bakteri sayısı 2 saatlik 3'e katlandığına göre. Ne kadar sürede bakteri sayısı 27'ye katlanır? (6)

Ö/ Bir bakteri kültüründeki bakteri sayısı her 1 saatte mevcut miktarının 2 katına çıkmaktadır. Başlangıçta 100 olan bakteri sayısı 24 saat sonra ne olur? $B = 100$

$$\underset{200}{2B} = \underset{100}{B} \cdot e^{p.1} \rightarrow e^{p} = 2$$

$$y(24) = 100 \cdot e^{p.24} = 100 \cdot (e^{p})^{24} = 100 \cdot 2^{24} \text{ olur.}$$

42
Devamı

* Yarılanma ömrü

Yarılanma ömrü : k
Başlangıç miktarı : B
Geçen süre : n

$$y(n) = B\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{k}}$$

Ö/ Bir radyoaktif maddenin yarı ömrü 10 yıl ise, 100 gram maddeden 20 gram kalması için kaç yıl gerekir?

$$y(n) = B\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{k}} \longrightarrow 20 = 100\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{10}}$$

$y(n) = 20$, $B = 100$
$k = 10$, $n = ?$

$$\ln\left(\frac{1}{5}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{10}}$$

$$\ln\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{n}{10}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{n}{10} = \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5} = \log_2 5$$

$\boxed{n = 10\cdot\log_2 5 \text{ bulunur.}}$

Ö/ Yıllar önce ölen sürüngen bir canlının yaşını tespit etmek için (Karbon−12) testi uygulanacaktır. Başlangıçta vücudunda 100 gram (Karbon−12) bulunan bu canlının vücudunda şu an 4 gram (karbon−12) bulunmaktadır. Buna göre, canlı kaç yaşındadır?
[(Karbon−12) yarı ömrü yaklaşık 5000 yıldır.]

$$y(n) = B\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{k}} \rightarrow 4 = 100\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{5000}}$$

$y(n) = 4$, $B = 100$
$k = 5000$, $n = ?$

$n = 5000\cdot\log_2 25 = 10000\cdot\log_2 5$ bulunur.

* Sıcaklık Değişimi (Newton Soğuma Yasası)

y : t zaman sonundaki sıcaklık

y_0 : Başlangıç sıcaklığı

S : Ortam sıcaklığı

t : zaman

(k : Sıcaklık değişim hızı)

$$y = S + (y_0 - S) \cdot e^{k \cdot t}$$

ö/ 0°C sıcaklıktaki bir madde 20°C sıcaklıktaki bir ortama getiriliyor. 4 dk. sonunda madde 10°C oluyorsa maddenin sıcaklığının 15°C olması için kaç dakika gerekir?

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot (y - 20)$$

$y(0) = 0$
$y(4) = 10$
$y(t) = 15$

$$\int \frac{dy}{y-20} = \int k \cdot dt \rightarrow \ln(y-20) = kt + C_1$$

$$y - 20 = e^{k \cdot t} \cdot C$$

$$y(0) = 0 \rightarrow C = -20$$

$$y = -20 \cdot e^{kt} + 20$$

$$y(4) = 10 \rightarrow e^{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$y(n) = 15 \rightarrow -20 \cdot e^{k \cdot t} + 20 = 15 \rightarrow \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$$

$t = 8$ olur.

$$* \quad y = S + (y_0 - S) \cdot e^{k \cdot t}$$

$$10 = 20 + (0 - 20) \cdot e^{k \cdot 4} \longrightarrow k = \frac{-\ln 2}{4}$$

$$15 = 20 + (0 - 20) \cdot e^{k \cdot t} \longrightarrow t = 8$$

Ö/ 0°C sıcaklıktaki bir cisim 30°C sıcaklıktaki bir odaya getiriliyor. 5 dk sonunda cismin sıcaklığı 10°C oluyor. Buna göre, cismin sıcaklığının 15°C olması için kaç dk. gerekir?

$y_0 = 0$
$s = 30$
$y = 10$
$t = 5$

$y = s + (y_0 - s) \cdot e^{k.t} \rightarrow 10 = 30 + (0 - 30) \cdot e^{k.5}$

$-20 = -30 \cdot e^{5k} \rightarrow \frac{2}{3} = e^{5k}$

$y_0 = 0$
$s = 30$
$y = 15$
$t = ?$

$15 = 30 + (0 - 30) \cdot e^{k.t}$

$-15 = -30 \cdot e^{k.t} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^5 = e^{k.t.5} \rightarrow \frac{1}{32} = \left(e^{5k}\right)^t$

$\frac{1}{32} = \left(\frac{2}{3}\right)^t$

$\boxed{\log_{(2/3)} \left(\frac{1}{32}\right) = t}$

$\log_{\frac{3}{2}} 32 = t = 5 \cdot \log_{\frac{3}{2}} 2$

Ö/ Sıcaklığı 50°C olan bir bardak kahvenin soğuması için sıcaklığı 25°C lik bir ortama bırakılıyor. Kahvenin 5 dk sonunda sıcaklığı 30C ye dönüştüğüne göre kahvenin 10 dk sonundaki sıcaklığı yaklaşık kaç °C dir?

$y_0 = 50$
$s = 25$
$t = 5$
$y = 30$

$y = s + (y_0 - s) \cdot e^{kt} \rightarrow 30 = 25 + (50 - 25) \cdot e^{k.5}$

$5 = 25 \cdot e^{5k} \rightarrow e^{5k} = \frac{1}{5}$

$\downarrow$

$e^{10k} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$

$y_0 = 50$
$s = 25$
$t = 10$
$y = ?$

$y = 25 + (50 - 25) \cdot e^{k.10}$

$= 25 + 25 \cdot e^{10.k}$

$= 25 + 25 \cdot \frac{1}{25}$

$= 26$

Ö/ Sıcaklığı 90° olan bir metal çubuk soğuması için sıcaklığı sabit olarak 10°C olan bir ortama bırakılıyor. Çubuğun sıcaklığı 5 dk. sonunda 70°C düştüğüne göre, çubuğun soğuma denklemini bulunuz.

$$y = 10 + 80 \cdot e^{\frac{t}{5} \cdot \ln\left(\frac{3}{4}\right)}$$