1.1. İşaret Kavramı ve İşlem Önceliği

$(-).(-) = (+)$ $\qquad$ $(-):(-) = (+)$

$(+).(+) = (+)$ $\qquad$ $(+):(+) = (+)$

$(+).(-) = (-)$ $\qquad$ $(+):(-) = (-)$

$(-).(+) = (-)$ $\qquad$ $(-):(+) = (-)$

$(+)+(+) = (+)$ $\qquad$ $(-)^{Tek} = (-)$

$(-)+(-) = (-)$ $\qquad$ $(-)^{Çift} = (+)$

$\left.\begin{array}{l}(+)+(-) = \\ (+)+(+) =\end{array}\right\}$ Mutlak değeri büyük olan sayının işareti. $\qquad$ $\left.\begin{array}{l}(+)^{Tek} \\ (+)^{Çift}\end{array}\right\rangle (+)$

www.salihyildiz.net

☺rnek:

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

I. $-2.3 + 6:2 - 1$

II. $(2.3) + 6:2.3$

III. $-4.3 - 2 + 5$

IV. $-1 - 2.3 + 4:2$

V. $(3 - 1).2:2$

www.salihyildiz.net

ç☺züm:

I. $-2.3 + 6:2 - 1 = -6 + 3 - 1 = -4$

II. $(2.3) + 6:2.3 = 6 + 3.3 = 6 + 9 = 15$

III. $-4.3 - 2 + 5 = -12 - 2 + 5 = -9$

IV. $-1 - 2.3 + 4:2 = -1-6+2 = -5$

V. $(3 - 1).2:2 = 2.2:2 = 4:2 = 2$

www.salihyildiz.net

☺rnek:

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

I. $(-2)^2$

II. (-2^4)

III. (-2^3)

IV. $(-2)^{-1}$

V. $(-2)^{-2}$

VI. $(-2)^{-3}$

www.salihyildiz.net

ç☺züm:

I. $(-2)^2 = 4$

II. $(-2^4) = -16$

III. $(-2^3) = -8$

IV. $(-2)^{-1} = \dfrac{1}{(-2)^1} = -\dfrac{1}{2}$

V. $(-2)^{-2} = \dfrac{1}{(-2)^2} = \dfrac{1}{4}$

VI. $(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = -\dfrac{1}{8}$

www.salihyildiz.net

salihyildiz.net

1.2. I. ve II. Dereceden Denklemler

İçinde bulunan değişken veya değişkenlerin özel değerleri için sağlanan açık önermelere **denklem** denir.

$a \neq 0$ ve $a, b \in R$ olmak üzere, $ax + b = 0$ şeklindeki denklemlere **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir.

Denklemi gerçekleyen x değerine **denklemin kökü** veya **çözüm kümesinin bir elemanı** denir.

$ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}$ dır. Çözüm kümesi(Ç.K) = $\{-\frac{b}{a}\}$ olur.

www.salihyildiz.net

☺rnek:

$9x - 3 = 6x + 18$

denkleminin kökünü bulunuz.

ç☺züm:

$9x - 3 = 6x + 18 \rightarrow 9x - 6x = 18 + 3 \rightarrow 3x = 21 \rightarrow x = 7$ bulunur.

☺rnek:

www.salihyildiz.net

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-a} = \frac{2}{3}$$

denkleminin bir kökü 6 olduğuna göre, **a nın değerini bulunuz.**

ç☺züm:

x = 6 denklemin bir kökü olduğundan, denklemi sağlar.

$$\frac{1}{6-3} + \frac{2}{6-2} - \frac{3}{6-a} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{6-a} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{\underset{(2)}{3}} + \frac{1}{\underset{(3)}{2}} - \frac{2}{\underset{(2)}{3}} = \frac{3}{6-a} \rightarrow \frac{1}{6} = \frac{3}{6-a}$$

$\rightarrow 6 - a = 18 \rightarrow -a = 12 \rightarrow a = -12$ bulunur.

www.salihyildiz.net

a, b, c $\in$IR ve $a \neq 0$ olmak üzere, $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ biçimindeki eşitliklere, **ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir.

Bu denklemde x bilinmeyen, a, b, c katsayılardır. Bu denklemi doğrulayan (sağlayan) gerçel sayılara denklemin **gerçek kökleri**, kökleri bulma işlemine de **denklemi çözme** denir. Denklemin gerçel köklerinden oluşan kümeye **çözüm kümesi** adı verilir.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}$ ifadesine denklemin **diskriminantı** denir.

salihyildiz.net

salihyildiz.net

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin köklerinin incelenmesi;

i) $\Delta > 0$ ise, denklemin iki farklı gerçel kökü vardır.

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ve } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ olurken,}$$

Çözüm kümesi(Ç.K.) iki elemanlıdır. Ç.K.={ x_1, x_2 } olur.

ii) $\Delta = 0$ ise, denklemin eşit (çakışık) iki gerçel kökü vardır.

$$\sqrt{\Delta} = 0 \text{ olduğundan, } x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \text{ olur.}$$

Bu durumda çözüm kümesi bir elemanlıdır. Ç.K.={ x_1=x_2 } olur.
Verilen denklem tam kare(bir ifadenin parantez karesi)dir.

iii) $\Delta < 0$ ise, denklemin gerçel kökleri yoktur.
Reel sayılar kümesinde(R) çözüm kümesi boş kümedir. Ç.K.=$\varnothing$ olur.

☺rnek:

$x^2 - 3x + 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ç☺züm:

İkinci dereceden denklemlerin çözüm kümesi bulunurken önce çarpanlarına ayırma yöntemi kullanılır. Çarpanlarına ayrılamayan denklemlerde ise diskriminant bulunarak çözüm kümesi bulunur.

$$x^2 - \underset{\substack{\downarrow \\ (-2-1)}}{3x} + \underset{\substack{\downarrow \\ (-2).(-1)}}{2} = (x-1).(x-2)$$

$(x-1).(x-2) = 0 \rightarrow x-1 = 0$ veya $x-2 = 0$ olduğundan, $x = 1$ veya $x = 2$ olur.
Ç.K. = {1, 2} bulunur.

☺rnek:

$2x^2 - 3x - 11 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ç☺züm:

Verilen denklem çarpanlarına ayrılamadığından denklemin diskriminantı bulunarak çözüm kümesi bulunur.
$2x^2 - 3x - 11 = 0$ denkleminde a=2, b=–3, c=–11 olduğundan,
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.2.(-11) = 9 + 88 = 97$ olur.
$\Delta > 0$ olduğundan gerçel iki kök vardır.

Denklemin kökleri: $x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$ formülünden,

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \mp \sqrt{97}}{2.2} \text{ olur. } x_1 = \frac{3+\sqrt{97}}{4} \text{ ve } x_2 = \frac{3-\sqrt{97}}{4} \text{ bulunur.}$$

www.salihyildiz.net

salihyildiz.net

1.3. Rasyonel Sayılar

Kesir

$a, b \in Z$ ve $b \neq 0$ olmak üzere, $\frac{a}{b}$ biçimindeki ifadelere **kesir** denir.

"a" sayısına kesrin **payı**, **"b"** sayısına kesrin **paydası**

"—" çizgisine **kesir çizgisi** adı verilir.

Basit Kesir

$\frac{a}{b}$ kesrinde payın mutlak değeri, paydanın mutlak değerinden küçük ise, $\frac{a}{b}$ kesrine **basit kesir** denir.

$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{-3}{7}, \frac{0}{1}(=0)$ … gibi.

* $\frac{a}{b}$ pozitif bir basit kesir ise, $\frac{a}{b} > \frac{a^2}{b^2} > \frac{a^3}{b^3}$ ... olur.

www.salihyildiz.net

Bileşik Kesir

$\frac{a}{b}$ kesrinde payın mutlak değeri, paydanın mutlak değerinden büyük veya eşit ise, $\frac{a}{b}$ kesrine **bileşik kesir** denir.

$\frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{-3}{2}, \frac{2}{1}(=2)$ … gibi.

* $\frac{a}{b}$ pozitif bir bileşik kesir ise, $\frac{a}{b} < \frac{a^2}{b^2} < \frac{a^3}{b^3}$ ... olur.

www.salihyildiz.net

Tamsayılı Kesir

$a \in Z^+$ ve $\frac{b}{c}$ basit kesir olmak üzere, $a\frac{b}{c}$ şeklindeki kesirlere **tamsayılı kesir** denir.

$2\frac{1}{3}, 1\frac{2}{5}$ … gibi.

$3\frac{1}{2}$ tamsayılı kesri, $3 + \frac{1}{2} = \frac{2.3+1}{2} = \frac{7}{2}$ şeklinde bileşik kesre çevrilir.

salihyildiz.net

salihyildiz.net

Rasyonel Sayılar

$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid b \neq 0 \text{ ve } a, b \in Z \right\}$ kümesine **Rasyonel Sayılar Kümesi** denir.

Rasyonel Sayılarda Toplama – Çıkarma İşlemi

Paydalar eşit değilse paydalar eşitlenerek işleme devam edilir.

$$\frac{a}{b} \mp \frac{c}{b} = \frac{a \mp c}{b} \quad (b \neq 0) \quad \text{veya} \quad \underset{(d)}{\frac{a}{b}} + \underset{(b)}{\frac{c}{d}} = \frac{a.d \mp b.c}{b.d} \quad (b \neq 0,\ d \neq 0)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3} \quad \text{veya} \quad \underset{(5)}{\frac{4}{3}} - \underset{(3)}{\frac{2}{5}} = \frac{5.4 - 3.2}{3.5} = \frac{20-6}{15} = \frac{14}{15} \ldots \text{ gibi.}$$

Çarpma İşlemi

Paylar çarpımı paya, paydalar çarpımı paydaya yazılarak işleme devam edilir.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (b \neq 0,\ d \neq 0)$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21} \ldots \text{ gibi.}$$

Bölme İşlemi

Bölünen kesir (1. kesir) aynen yazılır, bölen kesir (2. kesir) ters çevrilerek 1. kesir ile çarpılır.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad (b \neq 0,\ d \neq 0)$$

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{9} = \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 2} = \frac{27}{10} \ldots \text{ gibi.}$$

[☺] *Not*

$\frac{a}{b}$ **rasyonel sayısının,**

* toplamaya göre tersi: $-\frac{a}{b}$
* çarpmaya göre tersi: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ olur.

www.salihyildiz.net

salihyildiz.net

1.4. Ondalıklı Sayılar

Paydaları 10 ve 10'nun pozitif tam kuvvetleri olan kesirlere **ondalıklı kesir** veya **ondalıklı sayı** denir.

$\frac{11}{10} = 1,1$; $b = \frac{101}{100} = 1,01$; $c = \frac{1001}{1000} = 1,001\ldots$ gibi.

www.salihyildiz.net

Ondalıklı Sayılarda Toplama – Çıkarma İşlemi

Toplama – çıkarma işlemleri yapılırken virgüllerin aynı hizada olmasına dikkat edilir.

www.salihyildiz.net

☺rnek:

0,03 + 2,318 – 0,68 **toplama işleminin sonucunu bulunuz.**

ç☺züm:

$$\begin{array}{r} 0,030 \\ +\ 2,318 \\ \hline 2,348 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2,348 \\ -\ 0,680 \\ \hline 1,668 \end{array}$$

bulunur.

www.salihyildiz.net

Ondalıklı Sayılarda Çarpma İşlemi

İki ondalık sayı çarpılırken virgül yokmuş gibi çarpma işlemi yapılır. Çarpanların ikisinde de bulunan ondalık basamakların adeti kadar basamak, çarpımın sağından başlanarak virgülle ayrılır.

☺rnek:

(2,315) . (3,34) **çarpımını bulunuz.**

ç☺züm:

2,315 . 3,34

çarpımı yerine 2315 . 334 çarpımı yapılır.

Bulunan sonuçtan sola doğru

(2,**315**) → 3 basamak

(3,**34**) → 2 basamak olmak üzere,

toplam 3+2=5 basamak virgül kaydırılır.

2315.334=773210 olduğundan

(2,315).(3,34) =7,73210 bulunur.

www.salihyildiz.net

www.salihyildiz.net

salihyildiz.net

Ondalıklı Sayılarda Bölme İşlemi

Ondalık sayılar önce virgülden kurtarılır. Sonra bölme işlemi yapılır.

☺rnek:

$\frac{0,4}{0,02} - \frac{0,5}{0,25} + \frac{3,2}{0,032}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

ç☺züm:

$$\frac{0,4}{0,02} - \frac{0,5}{0,25} + \frac{3,2}{0,032} = \frac{0,40}{0,02} - \frac{0,50}{0,25} + \frac{3,200}{0,032} = \frac{40}{2} - \frac{50}{25} + \frac{3200}{32} = 20 - 2 + 100$$

= 118 bulunur.

Devirli Ondalıklı Sayılar

Bir rasyonel sayı, ondalıklı yazıldığında, ondalıklı kısımdaki sayılar belli bir rakamdan sonra tekrar ediyorsa böyle sayılara **devirli ondalıklı sayılar** denir.

2,33333… ; 3,7655555… ; 5,3434343434… gibi.

www.salihyildiz.net

Devirli Ondalıklı Sayıyı Rasyonel Sayıya Çevirme

Verilen devirli ondalık sayıda virgül yokmuş gibi sayının tamamından devretmeyen kısmın tamamı çıkartılıp paya yazılır. Paydaya ise virgülden sonra ki devreden rakam sayısı kadar 9, virgülden sonra devretmeyen rakam sayısı kadar 0 (sıfır) yazılır.

$$a,b\overline{cde} = \frac{abcde - ab}{9990}$$

$$0,\overline{a} = \frac{a}{9} \;;\; 0,\overline{ab} = \frac{ab}{99} \;;\; 0,0\overline{ab} = \frac{ab}{990}$$

[☺] *Not*

* $a,\overline{9} = a,\overline{99} = a,\overline{999} = a,\overline{9999}$ …
* $3,\overline{9} = 4$; $2,\overline{99} = 2,\overline{9} = 3$; $2,43\overline{9} = 2,44$
* $2,\overline{3} + 5,\overline{6} = 7,\overline{9} = 8$
* $1,\overline{28} + 4,\overline{71} = 5,\overline{99} = 5,\overline{9} = 6$

www.salihyildiz.net

salihyildiz.net

1.5. Üslü İfadeler

$a \in IR$ ve $n \in IN^+$ olmak üzere,

$$a^n$$

biçimindeki sayılara **Üslü İfadeler(Sayılar)** denir.

$n \rightarrow$ Üs(Kuvvet)

$a \rightarrow$ Taban

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tane}} = a^n$ olurken, $\underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n \text{ tane}} = n.a$ olur.

$2.2 = 2^2 = 4$; $(-5).(-5).(-5) = (-5)^3 = -125$; $(-\frac{1}{2}).(-\frac{1}{2}).(-\frac{1}{2}).(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$

$5 + 5 + 5 = 3.5$; $7 + 7 + 7 + 7 = 4 . 7$; $2^x + 2^x + 2^x + 2^x + 2^x = 5.2^x$ gibi.

Üslü İfadelerde Toplama ve Çıkarma İşlemi

Üslü ifadeler aynı olmak şartıyla ortak paranteze alınarak katsayılar toplanır veya çıkarılır.

$$p.a^n + k.a^n - r.a^n = (p + k - r).a^n$$

$5.(\frac{1}{2})^x - 3.(\frac{1}{2})^x = (5 - 3).(\frac{1}{2})^x = 2.(\frac{1}{2})^x$

$2 . 3^x - 4 . 3^x + 3 . 3^x = (2 - 4 + 3) . 3^x = 1 . 3^x = 3^x$ gibi.

Üslü İfadelerde Çarpma İşlemi

Üslü İfadelerin Tabanları Aynı ise;

$a \neq 0$ olmak üzere,

$a^n . a^m = a^{n+m}$; $a^m . a^n . a^{-p} = a^{m+n-p}$ olur.

$2^5 . 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$; $2^{x+1} . 2^{2x-2} . 2^{3-x} = 2^{x+1+2x-2+3-x} = 2^{2x+2}$ gibi.

Üslü İfadelerin Üsleri Aynı ise;

a, b ve c sıfırdan farklı olmak üzere,

$a^m . b^m = (a . b)^m$; $a^m . b^m . c^{-m} = (a . b . c^{-1})^m$

$2^3 . 5^3 = (2 . 5)^3 = 10^3$; $4^5 . 3^5 . 2^{-5} = (4 . 3 . 2^{-1})^5 = (4 . 3 . \frac{1}{2})^5 = (\frac{12}{2})^5 = 6^5$

$15^x = (3 . 5)^x = 3^x . 5^x$; $12^x = (2 . 2 . 3)^x = 2^x . 2^x . 3^x = 2^{x+x} . 3^x = 2^{2x} . 3^x$ gibi.

www.salihyildiz.net

salihyildiz.net

Üslü İfadelerde Bölme İşlemi

Üslü İfadelerin Tabanları Aynı ise;

$a \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$\frac{3^7}{3^3} = 3^7.3^{-3} = 3^4 = 81$; $\frac{2^4}{2^{-3}} = 2^4.2^{+3} = 2^7 = 128$ gibi.

Üslü İfadelerin Üsleri Aynı ise;

$b \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad ; \quad \frac{a^n \cdot c^n}{b^n} = \left(\frac{a \cdot c}{b}\right)^n$$

$\frac{12^3}{4^3} = (\frac{12}{4})^3 = (3)^3 = 27$; $\frac{2^5.6^5}{4^5} = (\frac{2.6}{4})^5 = (\frac{12}{4})^5 = 3^5 = 243$ gibi.

Üslü İfadelerin Kuvveti

$(a^n)^m = a^{n.m} = (a^m)^n$; $a^{m^n} = a^{(m^n)}$

$(2^3)^4 = (2^4)^3 = 2^{12}$; $\left[\left(-3^2\right)^{-1}\right]^3 = \left[\left(-3^2\right)\right]^{-3} = -3^{-6}$ gibi.

Üslü İfadelerde Eşitlik

Üslü İfadelerin Tabanları Aynı ise;

$a \notin \{-1, 0, 1\}$ olmak üzere,

$$a^m = a^n \rightarrow m = n$$

$2^{2x-4} = 2^{x+1} \rightarrow 2x - 4 = x + 1 \rightarrow 2x - x = 1 + 4 \rightarrow x = 5$ olur.

Üslü İfadelerin Üsleri Aynı ise;

$x \neq 0$ olmak üzere,

x tek sayı iken, $a^x = b^x \Leftrightarrow a=b$; x çift sayı iken, $a^x = b^x \Leftrightarrow a=b$ veya $a= -b$

$2^5 = x^5 \rightarrow x = 5$; $3^4 = x^4 \rightarrow x = 3$ veya $x = -3$ olur.

[☺] *Not*

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ $(a \text{ ve } b \neq 0)$	$2^0 = (-2)^0 = (\sqrt{5})^0 = (\frac{-3}{5})^0 = \ldots = 1$

www.salihyildiz.net

1.6. Köklü İfadeler

$n \geq 2$ doğal sayı olmak üzere,

$$A^n = B \rightarrow A = \sqrt[n]{B}$$

denklemini sağlayan **A** reel sayısına **B** reel sayısının **n. dereceden kökü** denir.

Temel Özellikleri

***1**

$\sqrt[n]{B} = B^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{B^m} = B^{\frac{m}{n}}$

$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{7} = 7^{\frac{1}{4}}$; $\sqrt{7^3} = 7^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[3]{6^4} = 6^{\frac{4}{3}}$ gibi.

***2**

$$\sqrt[n]{A^n} = \begin{cases} |A| & \text{, n çift sayı} \\ A & \text{, n tek sayı} \end{cases}$$

$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$, $\sqrt[4]{x^4} = |x|$; $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$, $\sqrt[5]{y^5} = y$ gibi.

***3**

$\left(\sqrt[n]{A}\right)^n = A$; $\left(\sqrt[n]{A}\right)^m = \sqrt[n]{A^m}$; $A\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x \cdot A^n}$

$\left(\sqrt[3]{-2}\right)^3 = -2$, $\left(\sqrt[4]{x}\right)^4 = x$; $\left(\sqrt[3]{-2}\right)^4 = \sqrt[3]{(-2)^4}$; $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \cdot 2^3}$ gibi.

***4**

$k \in Z^+$ olmak üzere,

$\sqrt[m]{A^n} = \sqrt[m.k]{A^{n.k}}$; $\sqrt[m]{A^n} = \sqrt[\frac{m}{k}]{A^{\frac{n}{k}}}$

$\sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3.4]{7^{2.4}} = \sqrt[12]{7^8}$; $\sqrt[6]{5^4} = \sqrt[\frac{6}{2}]{5^{\frac{4}{2}}} = \sqrt[3]{5^2}$ gibi.

Köklü İfadelerin Tanım Aralığı

$$\sqrt[n]{A} = \begin{cases} A \geq 0 & \text{, n çift sayı} \\ -\infty \leq A \leq \infty & \text{, n tek sayı} \end{cases}$$

☺rnek:

$$\sqrt{15 - 2x}$$

ifadesi reel sayılarda tanımlı olduğuna göre, **x in çözüm kümesini bulunuz.**

salihyildiz.net

ç☺züm:

$\sqrt{15-2x} \in IR$ olduğuna göre, $15 - 2x \geq 0$ olur.

$15 - 2x \geq 0 \rightarrow 15 \geq 2x \rightarrow x \leq \frac{15}{2}$ bulunur.

☺rnek:

$\sqrt{1-x} + \sqrt{x-1} + 5x$

toplamı bir reel sayı belirttiğine göre, **bu reel sayıyı bulunuz.**

ç☺züm:

$\sqrt{1-x} + \sqrt{x-1} + 5x \in R$ olduğundan, $1 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$ ve $x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

$x \leq 1$ ve $x \geq 1$ olduğundan $x = 1$ olur.

Buradan, $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-1} + 5x = \sqrt{1-1} + \sqrt{1-1} + 5.1 = 5$ bulunur.

Köklü İfadelerde Toplama – Çıkarma İşlemi

Tanım aralığında kök dereceleri ve kök içleri aynı olmak şartıyla ortak paranteze alınarak katsayılar toplanır veya çıkarılır.

$$a\sqrt[m]{x} + b\sqrt[m]{x} - c\sqrt[m]{x} = (a+b-c)\sqrt[m]{x}$$

$$4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = (4-2+3)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} = (5+3-2)\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$$ gibi.

Köklü İfadelerde Çarpma İşlemi

Tanım aralığında kök dereceleri aynı olmak şartıyla, katsayılar kendi aralarında çarpılarak katsayı olarak, kök içleri de kendi aralarında çarpılarak kök içine yazılır.

$\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a.b}$; $k\sqrt[m]{a}.p\sqrt[m]{b} = (k.p)\sqrt[m]{a.b}$

$\sqrt{2}.\sqrt{5} = \sqrt{2.5} = \sqrt{10}$; $2\sqrt[3]{5}.3\sqrt[3]{6} = (2.3)\sqrt[3]{5.6} = 6\sqrt[3]{30}$ gibi.

Köklü İfadelerde Bölme İşlemi

Tanım aralığında kök dereceleri aynı olmak şartıyla, katsayılar kendi aralarında bölünerek katsayı olarak, kök içleri de kendi aralarında bölünerek kök içine yazılır.

$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$; $\frac{k\sqrt[m]{a}}{p\sqrt[m]{b}} = \frac{k}{p}.\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ $(p \neq 0,\ b \neq 0)$

$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$; $\frac{14\sqrt[3]{24}}{2\sqrt[3]{3}} = \frac{14}{2}\sqrt[3]{\frac{24}{3}} = 7\sqrt[3]{8} = 7.2 = 14$ gibi.

www.salihyildiz.net

salihyildiz.net

Köklü İfadenin Kuvveti

A, B, C$\in R^+$ olmak üzere;

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{A}}} = \sqrt[m.n.p]{A}$; $\sqrt[m]{A\sqrt[n]{B\sqrt[p]{C}}} = \sqrt[m.n.p]{C.B^p.A^{n.p}}$

$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{10}}} = \sqrt[3.2.4]{10}$; $\sqrt[3]{2\sqrt{5\sqrt[4]{7}}} = \sqrt[3.2.4]{7.5^4.2^{2.4}} = \sqrt[24]{7.5^4.2^8}$ gibi.

www.salihyildiz.net

Köklü İfadenin Eşleniği

Çarpımları rasyonel olan iki irrasyonel sayıdan her birine, diğerinin **eşleniği** denir.

$\sqrt{a}$ $\xrightarrow{\text{eşleniği}}$ $\sqrt{a}$ $\left[\sqrt{5}.\sqrt{5} = \sqrt{25} = 5\right]$

$a - \sqrt{b}$ $\xrightarrow{\text{eşleniği}}$ $a + \sqrt{b}$ $\left[\left(2+\sqrt{3}\right).\left(2-\sqrt{3}\right) = 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1\right]$

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ $\xrightarrow{\text{eşleniği}}$ $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ $\left[\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 5 - 3 = 2\right]$

www.salihyildiz.net

☺rnek:

$\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

www.salihyildiz.net

ç☺züm:

$$\underset{\left(1-\sqrt{2}\right)}{\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}} + \underset{\left(\sqrt{2}\right)}{\dfrac{2}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}.(1-\sqrt{2})}{1-2} + \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}-2}{-1} + \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 2 \text{ bulunur.}$$

Köklü İfadelerde Sıralama

Kök dereceleri aynı olmak şartı ile kök içi büyük olan büyüktür. Bundan dolayı, kök içindeki sayıların büyüklüğüne göre sıralanır.

$a < b < c \rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{c}$

www.salihyildiz.net

☺rnek:

$a = \sqrt[4]{5}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt[3]{3}$ **sayılarının sıralamasını bulunuz.**

www.salihyildiz.net

ç☺züm:

$a = \sqrt[3/4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$

$b = \sqrt[6/]{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$

$c = \sqrt[4/3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$ $\rightarrow$ 64 < 81 < 125 olduğundan b < c < a bulunur.

salihyildiz.net

1.7. Logaritma

f: $R \to R^+$, $f(x) = a^X$, $a > 0$, $a \neq 1$ fonksiyonunun ters fonksiyonuna a tabanına göre **logaritma fonksiyonu** denir.

$f^{-1} : R^+ \to R$, $f^{-1}(x) = \log_a x$, $a \in R^+$, $a \neq 1$ şeklinde gösterilir.

$a \neq 1$ ve a, $x \in R^+$, $y \in R$ iken, $x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$

☺rnek:

Aşağıdaki ifadeleri sağlayan x değerlerini bulunuz.

a. $\log_{\sqrt{3}}(x-1) = 2$

b. $\log_5 x = -1$

ç☺züm:

a. $\log_{\sqrt{3}}(x-1) = 2$ ise, $x - 1 = (\sqrt{3})^2 \to x - 1 = 3 \to x = 4 \to$

b. $\log_5 x = -1$ ise, $x = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

www.salihyildiz.net

☺rnek:

$\log_2[5 + \log_2(x - 1)] = 3$ **eşitliğini sağlayan x değerini bulunuz.**

ç☺züm:

$\log_2[5+\log_2(x-1)] = 3 \to 5+\log_2(x-1) = 2^3 \to \log_2(x - 1) = 3 \to x - 1 = 2^3 \to x = 9$

Logaritmanın Tanım Aralığı

$f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun tanım aralığı bulunurken,

i. $a \neq 1$ ve $a > 0$

ii. $x > 0$

maddeleri ayrı ayrı incelenir.

☺rnek:

$f(x) = \log_3(x - 2)$ **fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.**

ç☺züm:

$f(x) = \log_3(x - 2) \to x - 2 > 0$ ise, $x > 2$ bulunur.

salihyildiz.net

Logaritmanın Özellikleri

*1	$\log_{10}x = \log x$ (Bayağı logaritma)	$\log_e x = \ln x$(Doğal logaritma)
*2	$\log_a a = 1$ ve $\log_a 1 = 0$	$\log 10 = 1$ ve $\ln e = 1$
*3	$\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$	$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$

www.salihyildiz.net

☺rnek:

$\ln 2 + \ln 3 + 1$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

ç☺züm:

$\ln 2 + \ln 3 + 1 = \ln(2.3) + 1 = \ln 6 + 1$ bulunur.

☺rnek:

$\log(x-1) + \log(x+1) + \log x$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

www.salihyildiz.net

ç☺züm:

$\log(x-1) + \log(x+1) + \log x = \log[(x-1).(x+1).x] = \log[(x^2-1).x] = \log(x^3-x)$ bulunur.

☺rnek:

$\log 3 = x$ olduğuna göre, **$\log(\frac{30}{9})$ ifadesinin değerini bulunuz.**

ç☺züm:

$\log 3 = x$ olmak üzere, $\log\left(\frac{30}{9}\right) = \log\left(\frac{10}{3}\right) = \log 10 - \log 3 = 1 - x$ bulunur.

www.salihyildiz.net

☺rnek:

$\log_7 5 = a$ ve $\log_2 7 = b$

olduğuna göre, **$\log_2 35$ ifadesinin a ve b cinsinden değerini bulunuz.**

www.salihyildiz.net

ç☺züm:

$\log_7 5 = a$ ve $\log_2 7 = b$ olmak üzere,

$\log_2 35 = \log_2 5 + \log_2 7 = \frac{\log_7 5}{\log_7 2} + \log_2 7 = \log_7 5.\log_2 7 + \log_2 7 = a.b + b = b(a+1)$ bulunur.

salihyildiz.net

Logaritmanın Özellikleri

*4	$\log_a x^n = n.\log_a x$	$\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m}.\log_a x$	$\log_{a^n} x^n = \log_a x$

www.salihyildiz.net

☺rnek:

$\frac{1}{2}\log_4 16 - 3\log_4 2 - \frac{1}{3}\log_4 8$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

ç☺züm:

$$\frac{1}{2}\log_4 16 - 3.\log_4 2 - \frac{1}{3}\log_4 8 = \log_4\sqrt{16} - \log_4 2^3 - \log_4\sqrt[3]{8} = \log_4\left(\frac{\sqrt{16}}{2^3.\sqrt[3]{8}}\right) = \log_4\left(\frac{4}{8.2}\right)$$

$$= \log_4\left(\frac{1}{4}\right) = \log_4(4^{-1}) = -\log_4 4 = -1 \text{ bulunur.}$$

www.salihyildiz.net

☺rnek:

$\ln\sqrt[4]{e^3}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

www.salihyildiz.net

ç☺züm:

$$\ln\sqrt[4]{e^3} = \ln e^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}.\ln e = \frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

☺rnek:

$\log\frac{1}{2} + \log\frac{2}{3} + \log\frac{3}{4} + \ldots + \log\frac{99}{100}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

www.salihyildiz.net

ç☺züm:

$$\log\frac{1}{2} + \log\frac{2}{3} + \log\frac{3}{4} + \ldots + \log\frac{99}{100} = \log\ \log\left(\frac{1}{\cancel{2}}.\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}.\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\ldots.\frac{\cancel{99}}{100}\right) = \log\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$= \log 100^{-1} = \log 10^{-2} = -2.\log 10 = -2 \text{ bulunur.}$$

www.salihyildiz.net

☺rnek:

$\log_2 32! = a$ olduğuna göre, **$\log_2 31!$ ifadesinin a cinsinden değerini bulunuz.**

ç☺züm:

$\log_2 32! = a$

$\log_2 32! = a = \log_2(32.31!) = \log_2 32 + \log_2 31!$

$a = \log_2 2^5 + \log_2 31! = 5 + \log_2 31! = 5 + \log_2 31! \rightarrow \log_2 31! = a - 5$ bulunur.

salihyildiz.net

salihyildiz.net

Logaritmanın Özellikleri

*5	$a^{\log_a b} = b$	$e^{\ln x} = x$	$b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$

*6	Taban Değiştirme		
	$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$	$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$	$\log_a b.\ \log_b c = \log_a c$

☺rnek:

$10^{\log x} + e^{\ln 3} = 7$ olduğuna göre, **x 'in değerini bunuz.**

ç☺züm:

$10^{\log x} + e^{\ln 3} = 7 \rightarrow x + 3 = 7 \rightarrow x = 7 - 3 = 4$ bulunur.

☺rnek:

$\log 2 = a$ ve $\log 3 = b$

olduğuna göre, **$\log_6 18$ ifadesinin a ve b cinsinden değerini bulunuz.**

ç☺züm:

$\log 2 = a$ ve $\log 3 = b$ olmak üzere,

$\log_6 18 = \dfrac{\log 18}{\log 6} = \dfrac{\log(3^2.2)}{\log(3.2)} = \dfrac{2.\log 3 + \log 2}{\log 3 + \log 2} = \dfrac{2.b + a}{b + a}$ bulunur.

☺rnek:

$\dfrac{1}{\log_2 48} + \dfrac{1}{\log_3 48} + \dfrac{1}{\log_8 48} - 1$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

ç☺züm:

$$\frac{1}{\log_2 48} + \frac{1}{\log_3 48} + \frac{1}{\log_8 48} - 1 = \log_{48} 2 + \log_{48} 3 + \log_{48} 8 - 1$$

$$= \log_{48}(2.3.8) - 1$$

$$= \log_{48} 48 - 1$$

$$= 1 - 1 = 0 \text{ bulunur.}$$

www.salihyildiz.net