

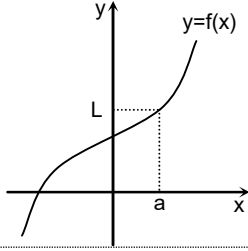
### Limit

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in A$ ,  $L \in \mathbb{R}$  olmak üzere,  
 $x$ ,  $a$ 'ya giderken ( $x \rightarrow a$ ),  
 $f(x)$ ,  $L$ 'ye gidiyorsa ( $f(x) \rightarrow L$ ),  
 $f(x)$  fonksiyonunun **limiti  $L$**  dir denir.  
 **$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$**  şeklinde gösterilir.

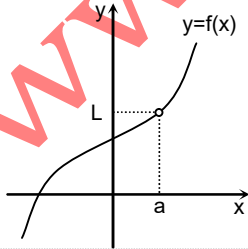
### Soldan Sağdan Limit

$x$ ,  $a$  ya **soldan** yaklaşıyorsa ( $x \rightarrow a^-$ )  
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  değerine **soldan limit** denir.

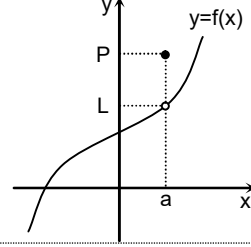
$x$ ,  $a$  ya **sağdan** yaklaşıyorsa ( $x \rightarrow a^+$ )  
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  değerine **sağdan limit** denir.



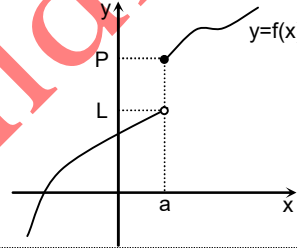
$f(a) = L$   
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$   
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$   
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$



$f(a) = \text{Tanımsız}$   
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$   
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$   
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

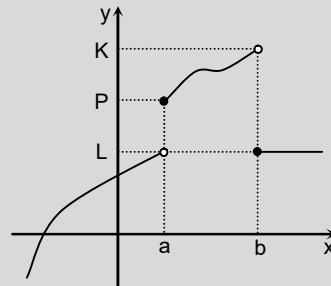


$f(a) = P$   
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$   
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$   
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$



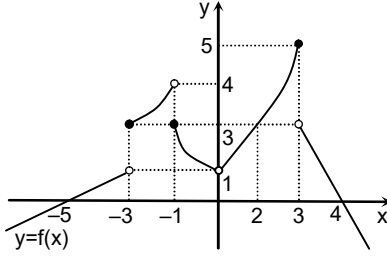
$f(a) = P$   
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$   
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = P$   
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  olduğundan,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  yoktur.

### [☹] Akfının Köşesi



\*  $f(x)$  fonksiyonunun parçalandığı  $a$  ve  $b$  noktalarına **sıçrama noktaları** denir.  
 \* Sıçrama noktalarında **limit yoktur**.

☺ rnek:



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonunun  $x$  in  $-5, -3, -1, 0, 2, 3, 4$  değerleri için var olan limitleri toplamını bulunuz.

ç züm:

$$\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = f(-5) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \text{yoktur. (Sağ ve sol limitleri farklı)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \text{yoktur. (Sağ ve sol limitleri farklı)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

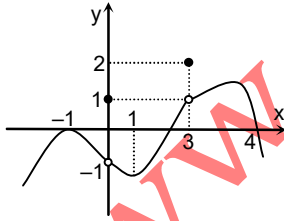
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \text{yoktur. (Sağ ve sol limitleri farklı)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$$

Var olan limitlerin toplamı  $0+1+3+0=4$  bulunur.

☺ rnek:



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonuna göre,  $f(3) + \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  toplamını bulunuz.

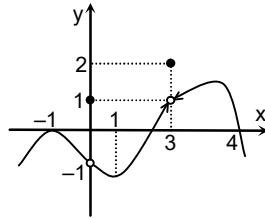
ç züm:

$x = 3$  için  $y = 2$  ise,

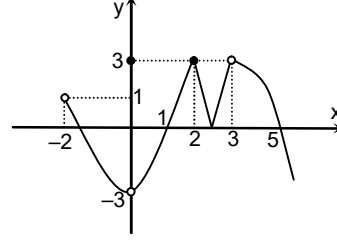
$f(3) = 2$  olur.

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$  olduğundan,

$f(3) + \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2+1 = 3$  bulunur.



☺ rnek:



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonuna göre,

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

toplamını bulunuz.

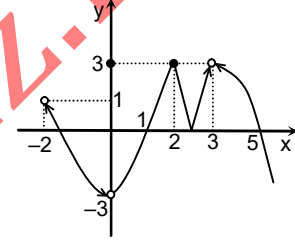
ç züm:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1$$

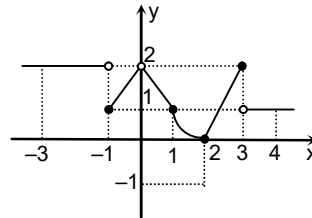
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1+3-3 = 1 \text{ bulunur.}$$

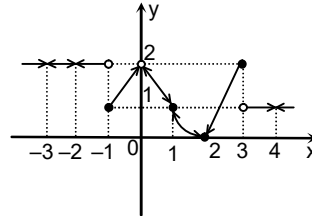


☺ rnek:



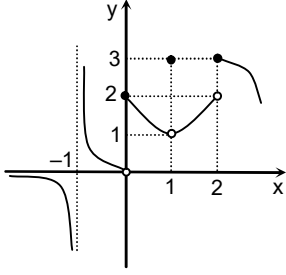
Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonunun  $[-3, 4]$  aralığındaki kaç tam sayı değerinde limitinin olduğunu bulunuz.

ç züm:



$-3, -2, 0, 1, 2, 4$  noktalarında soldan ve sağdan limit değerleri eşit olduğundan,  $f(x)$  fonksiyonunun  $[-3, 4]$  aralığında 6 tam sayı değerinde limiti vardır.

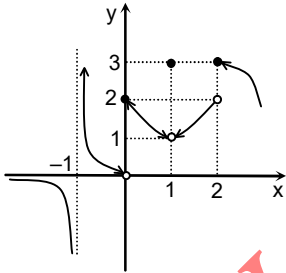
☺ rnek:



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonuna göre, aşağıdaki ifadelerden kaç tanesinin doğru olduğunu bulunuz.

- |   |  |
|---|--|
| I. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ | V. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$     |
| II. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$       | VI. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$    |
| III. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$      | VII. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ |
| IV. $f(1) + \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$  | VIII. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$  |

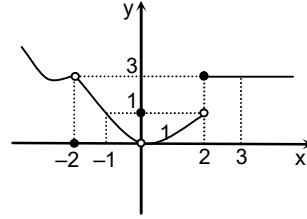
☺ züm:



- |   |
|---|
| I. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \neq -\infty$  |
| II. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$   |
| III. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \neq 2$   |
| IV. $f(1) = 3$ ve $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \rightarrow f(1) + \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 + 1 = 4 \neq 6$ |
| V. $\left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{Yoktur} \right) \neq 2$ (Sıçrama Noktası)                              |
| VI. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \neq 3$  |
| VII. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$  |
| VIII. $\left( \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{Yoktur} \right) \neq 3$ (Sıçrama Noktası)                           |

olduğundan, II ve VII olmak üzere 2 tanesi doğrudur.

☺ rnek:

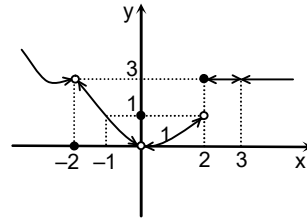


Yukarıda  $f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıda verilen ifadelerin değerlerini bulunuz.

- |   |
|---|
| I. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x+1)$                      |
| II. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{f(x-1)}$       |
| III. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x+3)}{3.f(x-1)}$ |
| IV. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{f(x-1)}$              |
| V. $\lim_{x \rightarrow 0}  f^3(x-2) $                  |
| VI. $\lim_{x \rightarrow -1} [\log_2 f(x)]$             |

☺ züm:

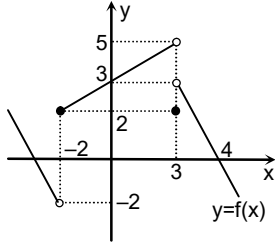


- |  |
|--|
| I. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$   |
| II. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{f(x-1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow -1} f(x)} = \frac{1}{3}$                        |
| III. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x+3)}{3.f(x-1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} f^2(x)}{\lim_{x \rightarrow -1} 3.f(x)} = \frac{3^2}{3 \cdot 1} = 3$ |
| IV. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{f(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f(x)}$ yoktur. (Sıçrama Noktası)  |
| V. $\lim_{x \rightarrow 0}  f^3(x-2)  = \lim_{x \rightarrow -2}  f^3(x)  = 3^3 = 27$   |
| VI. $\lim_{x \rightarrow -1} [\log_2 f(x)] = \log_2 \left[ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \right] = \log_2 1 = 0$  |

bulunur.

## KAVRAMA ~ 1

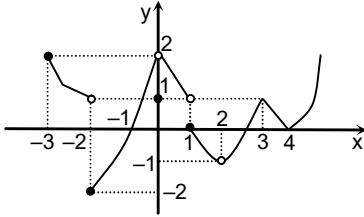
1.



Yukarıda grafiği verilen  $\mathbb{R}$  den  $\mathbb{R}$  ye  $f(x)$  fonksiyonu için aşağıdaki ifadelerden hangisinin doğru olduğunu bulunuz.

- I.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$       IV.  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 1$   
 II.  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -2$       V.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5$   
 III.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

2.



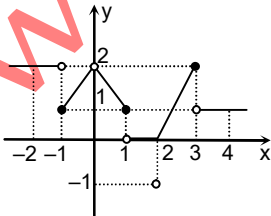
Yukarıda  $y=f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$$B = \{-1, 0, 2, 3, 4\}$$

$$A = \{m \mid m = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ ve } a \in B\}$$

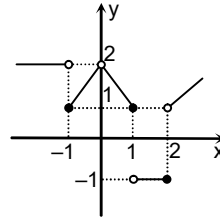
olduğuna göre, **A** kümesinin elemanları toplamını bulunuz.

3.



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonunun  $[-2, 4]$  aralığındaki kaç tam sayı değerinde limitinin olduğunu bulunuz.

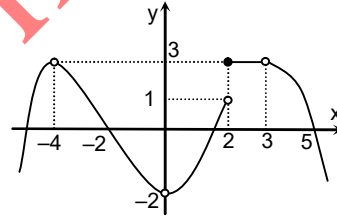
4.



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonuna göre, aşağıdaki ifadelerden hangisinin yanlış olduğunu bulunuz.

- I.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$       IV.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$   
 II.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$       V.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$   
 III.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$

5.

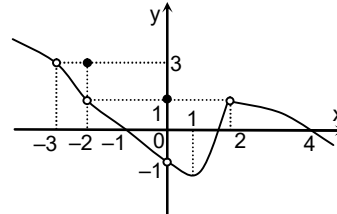


Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonuna göre,

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

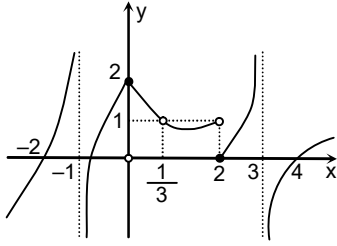
toplamını bulunuz.

6.



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonunun  $-3, -2, -1, 0, 2, 4$  noktalarında var olan limit değerleri toplamını bulunuz.

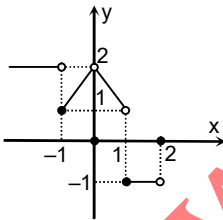
7.



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonuna göre, aşağıdaki ifadelerden kaç tanesinin doğru olduğunu bulunuz.

- I.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$       IV.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$   
 II.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  yoktur.      V.  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty$   
 III.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  yoktur.

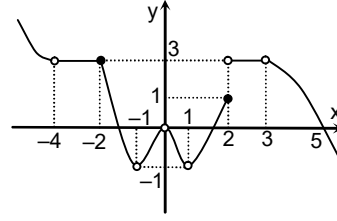
8.



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonuna göre, aşağıdaki ifadelerden hangisinin yanlış olduğunu bulunuz.

- I.  $f(1) = -1$       IV.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$   
 II.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$       V.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$   
 III.  $\lim_{x \rightarrow 1/2} f(x) > 1$

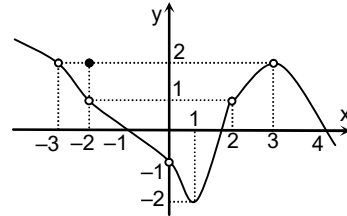
9.



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonuna göre, aşağıdaki ifadelerden hangisinin doğru olduğunu bulunuz.

- I.  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 0$       IV.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$   
 II.  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$       V.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 5$   
 III.  $f(x)$  in  $x = -1$  ve  $x = 1$  noktasında limiti yoktur.

10.



Yukarıda grafiği verilen  $f(x)$  fonksiyonuna göre,  $[-3, 4]$  aralığında limiti var olan tam sayı değerlerindeki limitler toplamını bulunuz.

Limitin Özellikleri	
*1	$\lim_{x \rightarrow a} c = c, c \in \mathbb{R} (c \text{ sabit})$
*2	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \mp g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \mp \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
*3	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ $\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x), c \in \mathbb{R} (c \text{ sabit})$
*4	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} (g(x) \neq 0)$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{c}{f(x)} = \frac{c}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} (f(x) \neq 0), c \in \mathbb{R} (c \text{ sabit})$
*5	$\lim_{x \rightarrow a} f^n(x) = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$
*6	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f^n(x) = k^n$
*7	$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} (n \text{ tek})$ $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} (n \text{ çift } f(x) \geq 0)$
*8	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ ve $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ olur.
*9	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ise, $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ olur.
[☺] <b>Aklımın Köşesi</b>	
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = m$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = n$ olsun.	
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \mp g(x)] = m \mp n$	$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = m \cdot n$
$\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{m}{n}$	$\lim_{x \rightarrow a} [r^{f(x)}] = r^m$
$\lim_{x \rightarrow a}  f(x)  =  m $	$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{m}$
$\lim_{x \rightarrow a} [\log f(x)] = \log [\lim_{x \rightarrow a} f(x)] = \log m$	

☺ rnek:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -2$$

olduğuna göre, aşağıda verilen limit değerlerini bulunuz.

I.  $\lim_{x \rightarrow 1} [3 \cdot f(x)]$

II.  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + 2 \cdot g(x) - 3]$

III.  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g^2(x)]$

IV.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{3 \cdot f(x)}{-g(x)} \right]$

V.  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{f(x) - 2 \cdot g(x)}$

VI.  $\lim_{x \rightarrow 1} [2^{f(x)} - |g(x)|]$

VII.  $\lim_{x \rightarrow 1} [\log_5 f^3(x)]$

☺ ç züm:

I.  $\lim_{x \rightarrow 1} [3 \cdot f(x)] = 3 \cdot 5 = 15$

II.  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + 2 \cdot g(x) - 3] = 5 + 2 \cdot (-2) - 3 = -2$

III.  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g^2(x)] = 5 \cdot (-2)^2 = 20$

IV.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{3 \cdot f(x)}{-g(x)} \right] = \frac{3 \cdot 5}{-(-2)} = \frac{15}{2}$

V.  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{f(x) - 2 \cdot g(x)} = \sqrt{5 - 2 \cdot (-2)} = \sqrt{5 + 4} = 3$

VI.  $\lim_{x \rightarrow 1} [2^{f(x)} - |g(x)|] = 2^5 - |-2| = 32 - 2 = 30$

VII.  $\lim_{x \rightarrow 1} [\log_5 f^3(x)] = \log_5 5^3 = 3 \cdot \log_5 5 = 3$

☺ rnek:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 4x + 5)$$

ifadesinin değerini bulunuz.

☺ züm:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 4x + 5) &= (3)^2 - 4 \cdot (3) + 5 \\ &= 9 - 12 + 5 \\ &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

☺ rnek:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x+1}{x^2-3x}$$

ifadesinin değerini bulunuz.

☺ züm:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x+1}{x^2-3x} &= \frac{7 \cdot (2) + 1}{(2)^2 - 3 \cdot (2)} \\ &= \frac{15}{-2} = -\frac{15}{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

☺ rnek:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{3x^2 + 4}$$

ifadesinin değerini bulunuz.

☺ züm:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{3x^2 + 4} &= \sqrt{3 \cdot (-2)^2 + 4} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

☺ rnek:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[4]{20-x}$$

ifadesinin değerini bulunuz.

☺ züm:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[4]{20-x} &= \sqrt[4]{20-4} \\ &= \sqrt[4]{16} \\ &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

☺ rnek:

$$\lim_{x \rightarrow 5} (1-x)^3$$

ifadesinin değerini bulunuz.

☺ züm:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} (1-x)^3 &= (1-5)^3 \\ &= (-4)^3 \\ &= -64 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

☺ rnek:

$$\lim_{x \rightarrow e} \ln x^3$$

ifadesinin değerini bulunuz.

☺ züm:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow e} \ln x^3 &= \ln e^3 \\ &= 3 \cdot \ln e = 3 \cdot 1 \\ &= 3 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

☺ rnek:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\log_x 4^x)$$

ifadesinin değerini bulunuz.

☺ züm:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (\log_x 4^x) &= \log_2 4^2 \\ &= \log_2 2^4 = 4 \log_2 2 \\ &= 4 \cdot 1 = 4 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

☺ rnek:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3^x - 1}{2^x + 1} \right)$$

ifadesinin değerini bulunuz.

☺ züm:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3^x - 1}{2^x + 1} \right) &= \frac{3^0 - 1}{2^0 + 1} = \frac{1-1}{1+1} \\ &= 0 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**KAVRAMA ~ 2**

1.  $f(x) = \sqrt{x-1}$   
 $g(x) = 2^x + 1$   
olduğuna göre,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2+f(x)}{1-g(x)}$  ifadesinin değerini bulunuz.

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} + 2x}{e}$   
ifadesinin değerini bulunuz.

3.  $\lim_{x \rightarrow -1} [\sqrt[3]{9-x^2} + x^3]$   
ifadesinin değerini bulunuz.

4.  $f(x) = \ln x$   
 $g(x) = e^x$   
olduğuna göre,  $\lim_{x \rightarrow -1} (f \circ g)(x)$  ifadesinin değerini bulunuz.

5.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} + e^{x-1}}{x^2 + 1}$   
ifadesinin değerini bulunuz.

6.  $f(x) = x^3 - 1$   
 $g(x) = 3^x + 8$   
olduğuna göre,  $\lim_{x \rightarrow -1} [f^2(x-1) - \sqrt{g(x+1)}]$   
ifadesinin değerini bulunuz.



7.  $\lim_{x \rightarrow 9} [\log_x(x+18)]$

ifadesinin değerini bulunuz.

9.  $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = 8$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) + 3g(x)) = 9$$

olduğuna göre,  $\lim_{x \rightarrow 1} [g(x)]^2$  limitinin değerini

bulunuz.

8.  $\lim_{n \rightarrow 9} \left( \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$

ifadesinin değerini bulunuz.

10.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} [a^2 + a.n.x - 1] = 0$

eşitliğini sağlayan a değerlerinin toplamı 4 olduğuna göre, n değerini bulunuz.

www.salinyildiz.net