

TANIM

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ fonksiyonunun ters fonksiyonuna a tabanına göre **logaritma fonksiyonu** denir.

$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ şeklinde gösterilir.

$a \neq 1$ ve $a, x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}$ iken, $x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri sağlayan x değerlerini bulunuz.

a. $\log_{\sqrt{3}}(x-1) = 2$

b. $\log_2 \frac{3x-1}{x+1} = 1$

c. $\log_5 x = -1$

d. $\log_x 0 = 3$

e. $\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[5]{4} = x$

ÇÖZÜM

a. $\log_{\sqrt{3}}(x-1) = 2$ ise, $x-1 = (\sqrt{3})^2$

$$x-1 = 3$$

$$x = 4$$

b. $\log_2 \frac{3x-1}{x+1} = 1$ ise, $\frac{3x-1}{x+1} = 2$

$$3x-1 = 2x+2$$

$$x = 3$$

c. $\log_5 x = -1$ ise, $x = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

d. $\log_x 0 = 3$ ise, çözüm kümesi boş küme olur.

[$\log_x A = B$ iken, $A \neq 0$ olduğundan]

e. $\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[5]{4} = x \rightarrow x = \log_{\frac{1}{2^3}} 4^{\frac{1}{5}} = \log_{\frac{1}{2^3}} 2^{\frac{2}{5}}$

$$= \frac{2}{\frac{1}{3}} \cdot \log_2 2$$

$$= \frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{6}{5} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$\log_2[5 + \log_2(x-1)] = 3$$

eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\log_2 [5 + \log_2(x-1)] = 3$$

$$5 + \log_2(x-1) = 2^3$$

$$\log_2(x-1) = 3$$

$$x-1 = 2^3 \Rightarrow x = 9$$

1. Tanım Aralığı

$$f(x) = \log_a x$$

fonksiyonunun tanım aralığı bulunurken,

i. $a \neq 1$ ve $a > 0$

ii. $x > 0$

maddeleri ayrı ayrı incelenir.

ÖRNEK

$$f(x) = \log_3(x-2)$$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x) = \log_3(x-2)$$

$x-2 > 0$ ise, $x > 2$ bulunur.

ÖRNEK

$$f(x) = \log_2 \left(\frac{x-3}{2-x} \right)$$

fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x) = \log_2 \left(\frac{x-3}{2-x} \right)$$

$$\frac{x-3}{2-x} > 0, x \neq 2 \text{ ve } x \neq 3$$

| | | | | |
|-------------------|-----------|-----|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 2 | 3 | $+\infty$ |
| $\frac{x-3}{2-x}$ | | - | + | - |

Çözüm kümesi $(2, 3)$ aralığı olur.

ÖRNEK

$$f(x) = \log_x(16 - x^2)$$

fonksiyonu kaç x tamsayısı için tanımlıdır?

LOGARİTMA

ÇÖZÜM

$$f(x) = \log_x (16 - x^2)$$

$$16 - x^2 > 0 \text{ ve } x > 0, x \neq 1$$

$$x^2 < 16$$

$$-4 < x < 4 \text{ ve } x > 0, x \neq 1$$

$$\text{olduğundan } 0 < x < 4, x \neq 1$$

$x = 2,3$ olmak üzere 2 tamsayı için tanımlıdır.

2. Logaritmanın Özellikleri

I. $\log_{10}x = \log x$ (Bayağı logaritma)

$$\log_e x = \ln x \text{ (Doğal logaritma)}$$

II. $\log_a a = 1$ ve $\log_a 1 = 0$

III. $\log_{10} 10 = 1$ ve $\ln e = 1$

IV. $\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$

ÖRNEK

$$\ln 2 + \ln 3 + 1$$

işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\ln 2 + \ln 3 + 1 = \ln(2.3) + 1$$

$$= \ln 6 + 1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$\log(x-1) + \log(x+1) + \log x$$

işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\log(x-1) + \log(x+1) + \log x$$

$$= \log[(x-1).(x+1).x]$$

$$= \log[(x^2-1).x]$$

$$= \log(x^3-x) \text{ bulunur.}$$

V. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

ÖRNEK

$$\log\left(\frac{50}{3}\right)$$

işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\log\left(\frac{50}{3}\right)$$

$$= \log 50 - \log 3$$

$$= \log 5 + \log 10 - \log 3$$

$$= \log 5 - \log 3 + 1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$\log 3 = x$$

olduğuna göre, $\log\left(\frac{30}{9}\right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\log 3 = x$$

$$\log\left(\frac{30}{9}\right) = \log\left(\frac{10}{3}\right) = \log 10 - \log 3 = 1 - x \text{ bulunur.}$$

VI. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

VII. $\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \cdot \log_a x$

VIII. $\log_{a^n} x^n = \log_a x$

ÖRNEK

$$\frac{1}{2} \log_4 16 - 3 \log_4 2 - \frac{1}{3} \log_4 8$$

işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\frac{1}{2} \log_4 16 - 3 \log_4 2 - \frac{1}{3} \log_4 8$$

$$= \log_4 \sqrt{16} - \log_4 2^3 - \log_4 \sqrt[3]{8}$$

$$= \log_4 \left(\frac{\sqrt{16}}{2^3 \sqrt[3]{8}} \right) = \log_4 \left(\frac{4}{8.2} \right)$$

$$= \log_4 \left(\frac{1}{4} \right) = \log_4 (4^{-1}) = -\log_4 4 = -1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$\ln \sqrt[4]{e^3}$$

işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\ln \sqrt[4]{e^3} = \ln e^{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \ln e$$

$$= \frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$\log_3 2 = \log_9 (x-1)^{x-1}$$

olduğuna göre, x'in değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\log_3 2 = \log_9(x-1)^{x-1}$$

$$\log_3 2^2 = \log_9(x-1)^{x-1}$$

$$\log_9 2^2 = \log_9(x-1)^{x-1} \text{ olduğundan } 2^2 = (x-1)^{x-1}$$

$$x-1=2 \rightarrow x=3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{99}{100}$$

işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{99}{100}$$

$$= \log \left(\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \dots \frac{99}{100} \right)$$

$$= \log \left(\frac{1}{100} \right) = \log 100^{-1} = \log 10^{-2} = -2 \cdot \log 10 = -2 \text{ bulur.}$$

ÖRNEK

$$\log_2 32! = a$$

olduğuna göre, $\log_2 31!$ ifadesinin a cinsinden değeri nedir?

ÇÖZÜM

$$\log_2 32! = a$$

$$\log_2 32! = a = \log_2(32 \cdot 31!) = \log_2 32 + \log_2 31!$$

$$a = \log_2 2^5 + \log_2 31!$$

$$a = 5 + \log_2 31!$$

$$a = 5 + \log_2 31! \rightarrow \log_2 31! = a - 5$$

ÖRNEK

$$\log 25 = m$$

$$\log \sqrt{2} = n$$

olduğuna göre, m ile n arasındaki bağıntı nedir?

ÇÖZÜM

$$\log 25 = m = \log 5^2 = 2 \cdot \log 5 \rightarrow \log 5 = \frac{m}{2}$$

$$\log \sqrt{2} = n = \log 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 2 \rightarrow \log 2 = 2n$$

$$\log 5 = \frac{m}{2}$$

$$+ \log 2 = 2n$$

$$\log 5 + \log 2 = \frac{m}{2} + 2n \quad \log(5 \cdot 2) = \frac{m+4n}{2}$$

$$1 = \frac{m+4n}{2} \rightarrow m+4n=2$$

ÖRNEK

$$\log_{\frac{1}{4}} \left[\log_{\frac{1}{9}} (\log_3 x) \right] = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre, x kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\log_{\frac{1}{4}} \left[\log_{\frac{1}{9}} (\log_3 x) \right] = \frac{1}{2}$$

$$\log_{\frac{1}{9}} (\log_3 x) = \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 x = \left(\frac{1}{9} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$x = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$$

$$\text{IX. } a^{\log_a b} = b$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$$

X. Taban Değişirme

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

XI. Sıralama

$$\log_a b \geq \log_a c \leftrightarrow b \geq c$$

ÖRNEK

$$\log 2 = a$$

$$\log 3 = b$$

olduğuna göre, $\log_6 18$ ifadesinin a ve b cinsinden değeri nedir?

ÇÖZÜM

$$\log 2 = a$$

$$\log 3 = b$$

$$\log_6 18 = \frac{\log 18}{\log 6} = \frac{\log(3^2 \cdot 2)}{\log(3 \cdot 2)} = \frac{2 \cdot \log 3 + \log 2}{\log 3 + \log 2} = \frac{2 \cdot b + a}{b + a}$$

ÖRNEK

$$\frac{1}{\log_2 48} + \frac{1}{\log_3 48} + \frac{1}{\log_8 48} - 1$$

işleminin sonucu kaçtır?

LOGARİTMA

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log_2 48} + \frac{1}{\log_3 48} + \frac{1}{\log_8 48} - 1 \\ &= \log_{48} 2 + \log_{48} 3 + \log_{48} 8 - 1 \\ &= \log_{48} (2 \cdot 3 \cdot 8) - 1 \\ &= \log_{48} 48 - 1 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

ÖRNEK

$\log(\tan 1) + \log(\tan 2) + \log(\tan 3) + \dots + \log(\tan 89)$
işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} & \log(\tan 1) + \log(\tan 2) + \log(\tan 3) + \dots + \log(\tan 89) \\ &= \log(\tan 1 \cdot \tan 2 \cdot \tan 3 \dots \tan 89) \\ &= \log\left(\frac{\sin 1}{\cos 1} \cdot \frac{\sin 2}{\cos 2} \cdot \frac{\sin 3}{\cos 3} \dots \frac{\sin 89}{\cos 89}\right) \\ &= \log 1 = 0 \end{aligned}$$

ÖRNEK

$\log 2 = 0,30103$
olduğuna göre, $\log 50$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0,30103 \\ \log 50 &= \log\left(\frac{100}{2}\right) = \log 100 - \log 2 \\ &= \log 10^2 - \log 2 \\ &= 2 - \log 2 \\ &= 2 - 0,30103 \\ &= 1,69897 \end{aligned}$$

ÖRNEK

$\frac{1}{\log_7 21} + \frac{\log 6}{\log 21} - \frac{1}{\log_2 21}$
işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log_7 21} + \frac{\log 6}{\log 21} - \frac{1}{\log_2 21} \\ &= \log_{21} 7 + \log_{21} 6 - \log_{21} 2 \\ &= \log_{21}\left(\frac{7 \cdot 6}{2}\right) = \log_{21} 21 = 1 \end{aligned}$$

ÖRNEK

$\log_7 5 = a$
 $\log_2 7 = b$
olduğuna göre $\log_2 35$ ifadesinin a ve b cinsinden değeri nedir?

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} \log_7 5 &= a \\ \log_2 7 &= b \\ \log_2 35 &= \log_2 5 + \log_2 7 = \frac{\log_7 5}{\log_7 2} + \log_2 7 \\ &= \log_7 5 \cdot \log_2 7 + \log_2 7 \\ &= a \cdot b + b \\ &= b(a + 1) \end{aligned}$$

3. Logaritmalı ve Üslü İfadeli Denklem Çözümü

ÖRNEK

$x + \log(2^x + 1) = x \cdot \log 5 + \log 6$
olduğuna göre, x'in değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} x + \log(2^x + 1) &= x \cdot \log 5 + \log 6 \\ \log 10^x + \log(2^x + 1) &= \log 5^x + \log 6 \\ \log[10^x \cdot (2^x + 1)] &= \log [5^x \cdot 6] \\ 5^x \cdot 2^x \cdot (2^x + 1) &= 5^x \cdot 6 \\ 2^x \cdot (2^x + 1) &= 2 \cdot 3 \\ 2^x = 2 &\text{ ise } x = 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$\log(-x) + \log(-x - 1) = \log 12$
olduğuna göre, eşitliğin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} \log(-x) + \log(-x - 1) &= \log 12 \\ \log[(-x) \cdot (-x - 1)] &= \log 12 \\ (-x) \cdot (-x - 1) &= 12 \\ x^2 + x - 12 &= 0 \\ (x + 4)(x - 3) &= 0 \\ x = -4 \text{ veya } x = 3 &\text{ bulunur.} \\ x = 3 &\text{ logaritmanın tanımını sağlamadığından çözüm} \\ &\text{kümesine alınmaz.} \\ \text{Ç.K} &= \{-4\} \end{aligned}$$

4. Logaritmalı Eşitsizlik Çözümü

ÖRNEK

$\log_3(2x - 5) < 1$
olduğuna göre, çözüm kümesi nedir?

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} \log_3(2x - 5) &< 1 \\ * 2x - 5 > 0 &\rightarrow x > \frac{5}{2} \\ * 2x - 5 < 3^1 &\rightarrow 2x < 8 \rightarrow x < 4 \text{ olur.} \\ \text{Çözüm kümesi: } &\left(\frac{5}{2}, 4\right) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$$\log_1(x-5) + 4 > 0$$

olduğuna göre, çözüm kümesi nedir?

ÇÖZÜM

$$\log_1(x-5) + 4 > 0$$

$$* x - 5 > 0 \rightarrow x > 5$$

$$* -\log_2(x-5) + 4 > 0 \rightarrow \log_2(x-5) < 4$$

$$x - 5 < 2^4$$

$$x < 21$$

Çözüm kümesi: (5, 21) bulunur.

5. Karakteristik ve Mantis

$$\log_x = a, \text{bcd} = a + 0, \text{bcd}$$

Logaritmanın Karakteristiği: a

Logaritmanın Mantisi : 0, bcd

[Mantis kesinlikle negatif olmaz.]

$$\log_x = -a, \text{bcd} = -a - 0, \text{bcd}$$

$$\log_x = \bar{a}, \text{bcd} = -a + 0, \text{bcd}$$

ÖRNEK

$$\log_x = 2,3501$$

ifadesinin karakteristik ve mantisini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_x = 2,3501 = 2 + 0,3501$$

Logaritmanın karakteristiği: 2

Logaritmanın mantisi: 0, 3501

ÖRNEK

$$\log(0,000505)$$

ifadesinin karakteristiği kaçtır?

ÇÖZÜM

$\log(0,000505)$ ifadesinin karakteristiğine bakılırken sayının sıfırdan farklı ilk rakamın solundaki sıfır sayısına bakılır. 4 tane sıfır olduğundan, logaritmanın karakteristiği $= -4 = \bar{4}$ olur.

6. Basamak Sayısını Bulma

$$\log A = x, \text{bcd} \text{ olmak üzere,}$$

A sayısının basamak sayısı: (x + 1) olur.

ÖRNEK

$$\log A = 3,2401$$

olduğuna göre, A sayısı kaç basamaklıdır?

ÇÖZÜM

$$\log A = 3,2401 \text{ olduğundan}$$

A sayısının basamak sayısı: 3 + 1 = 4 olur.

ÖRNEK

$$\log 2 = 0,30103$$

olduğuna göre, 4^{25} kaç basamaklıdır?

ÇÖZÜM

$$\log 2 = 0,30103$$

$$\log 4^{25} = \log 2^{50} = 50 \cdot \log 2$$

$$= 50 \cdot (0,30103)$$

$$= 15,0515$$

olduğundan 4^{25} sayısı 15 + 1 = 16 basamaklıdır.

7. Kologaritma (Colog)

$$\text{colog } x = -\log x = \log x^{-1} = \log \left(\frac{1}{x} \right)$$

ÖRNEK

$$\log x = 2,65$$

olduğuna göre, colog x kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\text{colog } x = -\log x = -2,665$$

$$= -2 - 0,65 + 1 - 1$$

$$= -3 + (1 - 0,65)$$

$$= -3 + 0,35$$

$$= \bar{3},35$$

ÖRNEK

$$\text{colog } A = \bar{4},125$$

olduğuna göre, log A kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\text{colog } A = \bar{4},125$$

$$-\log A = -4 + 0,125$$

$$\log A = 4 - 0,125 + 1 - 1$$

$$\log A = 3 + 0,875$$

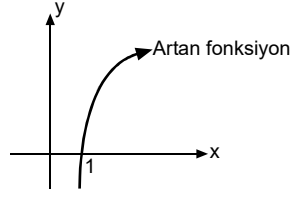
$$\log A = 3,875$$

LOGARİTMA

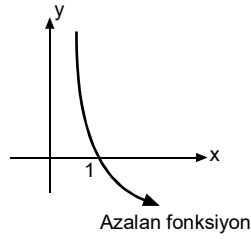
8. Logaritma Fonksiyon Grafiği

$y = \log_a f(x)$ fonksiyonun grafiği

$a > 1$ ise,



$0 < a < 1$ ise,



Grafiği çizmek için takip edilecek işlemler

- Tanım aralığı bulunur.
- $x = 0$ için y bulunur.
 $y = 0$ için x bulunur.
- y ve $\log_a f(x)$ fonksiyonunda
 $a > 1$ ise artan grafik
 $0 < a < 1$ ise azalan grafik çizilir.
- $y = \log_a f(x)$ fonksiyonunda
 $f(x) = 0$ yapan düşey asimptotlar bulunur.

ÖRNEK

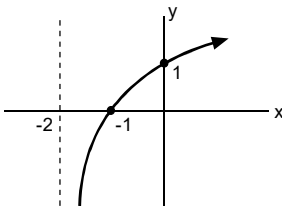
$$y = \log_2(x + 2)$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

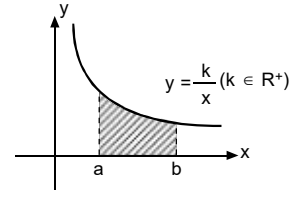
$y = \log_2(x + 2)$ fonksiyonunda,

- Tanım Aralığı,
 $x + 2 > 0$ ise, $x > -2$
- $x = 0$ için $y = \log_2(0 + 2) = 1$
 $y = 0$ için $0 = \log_2(x + 2)$
 $2^0 = x + 2$
 $x = -1$
- $a = 2 > 1$ artan fonksiyon
- Düşey asimptot,
 $x + 2 = 0$ ise $x = -2$



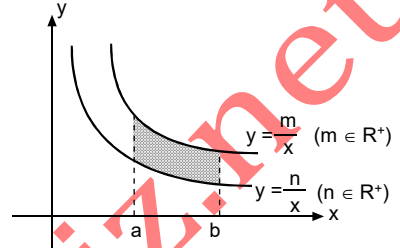
9. Logaritma ile Alan Hesabı

i.



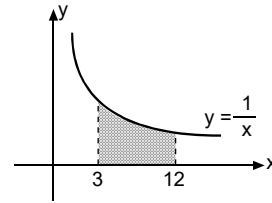
Taralı Alan: $k \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

ii.



Taralı alan: $(m - n) \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

ÖRNEK

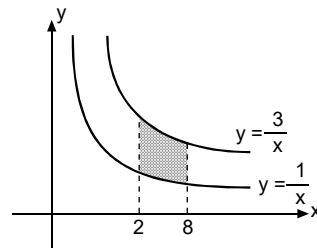


Taralı alanı bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\text{Taralı Alan: } 1 \cdot \ln\left(\frac{12}{3}\right) = \ln 4$$

ÖRNEK



Taralı alanı bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\text{Taralı Alan: } (3 - 1) \cdot \ln\left(\frac{8}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot \ln 4$$

$$= \ln 16$$